Physik GKLK 11, AB 07 – Wellen allgemein und Dopplereffekt – Lösung 07.05.2012

Aufgabe 1:

Ein Modellflugzeug durchfliegt mit konstanter Bahngeschwindigkeit und konstanter Höhe eine Kreisbahn. Der Flugzeugmotor erzeugt einen Ton mit konstanter Frequenz.

Ein Beobachter befindet sich auf einem Aufsichtsturm genau in der gleichen Höhe wie das Flugzeug. Die Entfernung des Beobachters vom Flugzeug ist groß gegen den Bahnradius.
Er misst die Frequenz des an seiner Position hörbaren Tones in Abhängigkeit von der Zeit.
Ergebnis:
Die aufgenommenen Frequenzen wiederholen sich alle *31,42 s*.
Die niedrigste gemessene Frequenz beträgt $f_{min}=236{,}1\ Hz.$
Die höchste gemessene Frequenz beträgt $f_{max}=265{,}6\ Hz.$

a) Berechne die Motorfrequenz und die Bahngeschwindigkeit des Flugzeugs.

Betrachte den Dopplereffekt mit bewegtem Sender und ruhendem Empfänger.

f_0: Motorfrequenz
f_E: Vom Beobachter wahrgenommene Frequenz
v: Geschwindigkeit des Flugzeugs relativ zum Beobachter
c: Schallgeschwindigkeit

Weil die Entfernung des Beobachters vom Flugzeug ist groß gegen den Bahnradius, kann die Bewegung auf eine eindimensionale Schwingung auf der Beobachterlinie reduziert werden.

1. Fall: Das Flugzeug bewegt sich auf den Empfänger zu $f_E=\frac{f_0}{1-v/c}$

2. Fall: Die Schallquelle bewegt sich auf den Empfänger zu $f_E=\frac{f_0}{1+v/c}$

Hier:

$f_{max}=\frac{f_0}{1-v/c}$ die Frequenz, wenn das Flugzeug auf den Beobachter zufliegt

$f_{min}=\frac{f_0}{1+v/c}$ die Frequenz, wenn das Flugzeug vom Beobachter wegfliegt

Gleichungen nach f_0 auflösen:

$$f_0=f_{max}\cdot(1-v/c)$$
$$f_0=f_{min}\cdot(1+v/c)$$

Gleichsetzen:

$$f_{min}\cdot(1+v/c)=f_{max}\cdot(1-v/c)$$
$$\Leftrightarrow f_{min}+\frac{f_{min}v}{c}=f_{max}-\frac{f_{max}v}{c} \quad | \quad \cdot c$$
$$\Leftrightarrow c\,f_{min}+f_{min}v=c\,f_{max}-f_{max}v \quad | \quad +f_{max}v-c\,f_{min}$$
$$\Leftrightarrow f_{max}v+f_{min}v=c\,f_{max}-c\,f_{min} \quad | \text{T}$$

$$\Leftrightarrow v(f_{max}+f_{min})=c(f_{max}-f_{min}) \quad | \quad :(f_{max}+f_{min})$$

$$\Leftrightarrow v=c\frac{(f_{max}-f_{min})}{(f_{max}+f_{min})}$$

Einsetzen: $v=340\frac{m}{s}\frac{265{,}6s^{-1}-236{,}1s^{-1}}{265{,}6s^{-1}+236{,}1s^{-1}}=340\frac{m}{s}\frac{29{,}5s^{-1}}{501{,}7s^{-1}}=19{,}992\frac{m}{s}$

Motorfrequenz: $f_0=f_{max}\cdot(1-v/c)=265{,}6s^{-1}\cdot(1-\frac{19{,}992\,ms^{-1}}{340\,ms^{-1}})=249{,}983\,s^{-1}$

A: Die Motorfrequenz beträgt etwa 250 Hz.

b) Berechne den Bahnradius des Modellflugzeugs.

Da sich die Frequenzen in $T=31{,}42\,s$ wiederholen, fliegt das Flugzeug in dieser Zeit einen kompletten Kreis .

$$2\pi r=vT \qquad \Leftrightarrow r=\frac{vT}{2\pi}=19{,}992\,ms^{-1}\cdot 31{,}42\frac{s}{2\pi}=99{,}973\,m$$

A: Der Bahnradius beträgt etwa 100 m.

Aufgabe 2: Ein Wasserskifahrer fährt mit einer stets konstanten Geschwindigkeit von 12,0 m/s. Wenn er in die gleiche Richtung fährt wie die fortlaufende Wasserwelle, springt er alle 0,60 s über einen Wellenkamm. Fährt er gegen die Welle springt er alle 0,50 s über einen Wellenkamm. Hinweis: Die Geschwindigkeit des Fahrers sei größer als die Wellengeschwindigkeit.

a) Bestimme die Wellengeschwindigkeit.

t_m: Zeit zwischen zwei Wellenkämmen, wenn er mit der Welle fährt

t_g: Zeit zwischen zwei Wellenkämmen, wenn er gegen der Welle fährt

$$I. \quad v\cdot t_m=\lambda+v_{ph}\cdot t_m$$

$$II. \quad v\cdot t_g=\lambda-v_{ph}\cdot t_g \quad | \quad I.-II.$$

$$v\cdot(t_m-t_g)=v_{ph}(t_m+t_g) \quad \Leftrightarrow \quad v_{ph}=\frac{v\cdot(t_m-t_g)}{(t_m+t_g)}=\frac{12\frac{m}{s}\cdot(0{,}6s-0{,}5s)}{0{,}6s+0{,}5s}\approx 1{,}1\frac{m}{s}$$

oder mit der Formel für den bewegten Sender:

$$f_1=\frac{f_0}{1+\frac{u}{v_{ph}}} \Leftrightarrow f_0=f_1\left(1+\frac{u}{v_{ph}}\right) \qquad f_2=\frac{f_0}{1-\frac{u}{v_{ph}}} \Leftrightarrow f_0=f_2\left(1-\frac{u}{v_{ph}}\right)$$

$$\Rightarrow f_1\left(1+\frac{u}{v_{ph}}\right)=f_2\left(1-\frac{u}{v_{ph}}\right)$$

$$\Leftrightarrow f_1+f_1\left(\frac{u}{v_{ph}}\right)-f_2-f_2\left(\frac{u}{v_{ph}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow f_1\left(\frac{u}{v_{ph}}\right)-f_2\left(\frac{u}{v_{ph}}\right)=f_2-f_1$$
$$\Leftrightarrow (f_1-f_2)\left(\frac{u}{v_{ph}}\right)=f_2-f_1$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{u}{v_{ph}}\right)=\frac{f_2-f_1}{f_1-f_2}$$
$$\Leftrightarrow u=\frac{f_2-f_1}{f_1-f_2}\cdot v_{ph}$$
$$\Leftrightarrow u\frac{f_1-f_2}{f_2-f_1}=v_{ph}$$

A: Die Wellengeschwindigkeit beträgt 1,1 m/s.

b) Berechne die Wellenlänge der Wasserwelle.

$$\lambda=v\cdot t_m-v_{ph}\cdot t_m=t_m(v-v_{ph})=0{,}6\,s\,(12\frac{m}{s}-1{,}1\frac{m}{s})=6{,}5\,m$$

A: Die Wellenlänge beträgt 6,5 m.

<u>**Aufgabe 3:**</u> Ein 1000 kg schweres Auto mit vier Insassen von jeweils 82 kg Gewicht fährt über eine holprige "Waschbrettstraße“ mit regelmäßigen Wellen im Abstand von 4,0m. Die Stoßdämpfer lassen das Auto bei einer Geschwindigkeit von 16 km/h am stärksten schwingen. Nun hält das Auto an und die vier Insassen steigen aus. Um wie viel hebt sich das Auto in den Stoßdämpfern aufgrund dieses Gewichtsverlusts?

Lösung: Bei 16 km/h treffen die Bodenwellen mit der Eigenfrequenz der Stoßdämpfer auf das Auto.

$$f=\frac{1}{4{,}0\,m}\cdot\frac{16}{3{,}6}\frac{m}{s}=\frac{10}{9}\frac{1}{s}\approx 1{,}1\,Hz \qquad \omega=2\pi f\approx 6{,}98\frac{1}{s}$$

$$\omega=\sqrt{\frac{D}{m}}\quad |^2\quad \Rightarrow \omega^2=\frac{D}{m}\Leftrightarrow D=\omega^2 m=(6{,}98\,s^{-1})^2\cdot(1000+4\cdot 82)kg\approx 64725{,}1\frac{kg}{s^2}$$

Hookesches Gesetz: $F=D\cdot s$ Die Federn werden so weit ausgelenkt, dass die Federkraft mit der Gewichtskraft im Gleichgewicht ist. Also

$$m\,g=D\cdot s \qquad \Leftrightarrow s=\frac{m\,g}{D}$$

Masse mit Insassen $m_1=1328\,kg.$ Masse ohne Insassen $m_2=1000\,kg.$

$$s_1=\frac{m_1 g}{D}=\frac{1328\,kg\cdot 9{,}81\,m\,s^{-2}}{64725{,}1\,kg\,s^{-2}}=0{,}201\,m$$

$$s_2=\frac{m_2 g}{D}=\frac{1000\,kg\cdot 9{,}81\,m\,s^{-2}}{64725{,}1\,kg\,s^{-2}}=0{,}152\,m$$

$$\Delta s=s_2-s_1=4{,}9\,cm$$

A: Das Auto hebt sich um 4,9 cm.

<u>Aufgabe 4:</u> Eine harmonische Schwingung breite sich vom Nullpunkt als transversale Störung längs der x-Achse mit der Geschwindigkeit $v_{Ph} = 7{,}5\,\frac{mm}{s}$ aus.

Für die Amplitude und die Kreisfrequenz dieser Schwingung gilt: $A = 1{,}0\,cm$; $\omega = \frac{\pi}{2}\,Hz$

a) Berechne die Periodendauer T, die Frequenz f und die Wellenlänge.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \Leftrightarrow \boldsymbol{T} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\frac{\pi}{\frac{\pi}{2}\,Hz} = \mathbf{4\,s} \qquad \boldsymbol{f} = \frac{1}{T} = \mathbf{0{,}25\ Hz}$$

$$v_{ph} = \frac{\lambda}{T} \quad \Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda} = v_{ph} \cdot T = 7{,}5\,\frac{mm}{s} \cdot 4\,s = \mathbf{30\ mm}$$