Physik LK 12, Klausur 04 – Induktion - Lösung 20.05.2011

Die Rechnungen bitte vollständig angeben und die Einheiten mitrechnen. Antwortsätze schreiben, wenn Zahlenwerte zu berechnen sind. Die Reibung ist bei allen Aufgaben zu vernachlässigen, wenn nicht explizit anders verlangt. Bei allen Aufgaben ist das Vakuum als Umgebung anzunehmen, wenn nicht anders angegeben. Kontrolllösungen dürfen nicht zur Lösung der gleichen Aufgabe benutzt werden.

Erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner; genehmigtes, handgeschriebenes Formelblatt; Formelsammlung

Aufgabe 1: Induktion

In einer langen zylindrischen Feldspule liegt eine kurze Induktionsspule. Die Spulenachsen sind parallel. Die Länge der Feldspule beträgt $l=45\,cm$, ihre Windungszahl $n_1=400$. Die Induktionsspule hat $n_2=1800$ Windungen, die von den Windungen umschlossene Fläche beträgt $A=7{,}5\,cm^{2.}$

1.1: Nach $t_1=0{,}1\,s$ fließt ein Strom von $I_1=4{,}476232774\cdot 10^{-5}\,A.$

1.1.1: Berechne die Energie des Magnetfelds.

$$L=\mu_0\mu_r n^2\frac{A}{l}=4\,\pi\cdot 10^{-7}\frac{V\,s}{A\,m}\cdot 400^2\cdot\frac{7{,}5\cdot 10^{-4}\,m^2}{0{,}45\,m}\approx 3{,}351032164\cdot 10^{-4}\frac{V\,s}{A}=3{,}351032164\cdot 10^{-4}\,H$$

$$\boldsymbol{E_{mag}}=\frac{1}{2}L\,I^2=3{,}357174529\cdot 10^{-13}\frac{V\,s}{A}A^2=3{,}36\cdot 10^{-13}\frac{N\,m\,s}{A\,s\,A}A^2=\mathbf{3{,}36\cdot 10^{-13}}\,\boldsymbol{J}$$

A: Die Energie beträgt 37 pJ.

1.1.2: Berechne die Kapazität eines Kondensators, der bei einer Spannung von $U=1\,V$ und dem Plattenabstand $d=1\,cm$ die gleiche Energiedichte wie das Magnetfeld der Feldspule hat.

$$\rho_{mag}=\frac{E_{mag}}{A\,l}=\frac{3{,}36\cdot 10^{-13}\,J}{7{,}5\cdot 10^{-4}\,m^2\cdot 0{,}45\,m}=9{,}94718379\cdot 10^{-10}\frac{J}{m^3}$$

Bei den gegebenen Daten steht die Energiedichte des Kondensators bereits fest.

$$E=\frac{U}{d}=\frac{1\,V}{0{,}01\,m}=100\frac{V}{m}$$

$$\rho_e=\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2=\frac{1}{2}\cdot 8{,}8542\cdot 10^{-12}\frac{A^2 s^2}{N\,m^2}\cdot 100^2\frac{V^2}{m^2}=4{,}4271\cdot 10^{-8}\frac{A^2 s^2}{N\,m^2}\frac{N^2 m^2}{A^2 s^2 m^2}=4{,}4271\cdot 10^{-8}\frac{N\,m}{m^3}$$

A: Es gibt keinen solchen Kondensator.

1.1.3: Berechne die induzierte Spannung.

$$B=\mu_0\,I\,\frac{n}{l}=4\cdot\pi\cdot 10^{-7}\frac{V\,s}{A\,m}\cdot 4{,}476232774\cdot 10^{-5}\,A\cdot\frac{400}{0{,}45\,m}=5\cdot 10^{-8}\frac{V\,s}{m^2}=5\cdot 10^{-8}\,T$$

$$\boldsymbol{U_{ind}}=-n_2\,A\frac{\Delta B}{\Delta t}=-1800\cdot\frac{7{,}5}{10000}m^2\cdot\frac{5\cdot 10^{-8}\,T}{0{,}1\,s}=\mathbf{-6{,}75\cdot 10^{-7}}\,\boldsymbol{V}$$

A: Die induzierte Spannung beträgt 67,5 mJ.

<u>1.2:</u> Jetzt steigt der Strom linear an. Nach einer gewissen Zeit ist eine Stromstärke von $1\,A$ erreicht.

<u>1.2.1:</u> Berechne die Zeit, in welcher der Anstieg erfolgen muss, damit an den Enden der Induktionsspule eine Spannung von $6\,mV$ induziert wird.

$$B=\mu_0 I\frac{n}{l}=4\cdot\pi\cdot 10^{-7}\frac{V\,s}{A\,m}\cdot 1\,A\cdot\frac{400}{0{,}45\,m}=5\cdot 10^{-8}\frac{V\,s}{m^2}=1{,}117\cdot 10^{-3}\,T$$

$$U_{ind}=-n_2 A\frac{\Delta B}{\Delta t}\Leftrightarrow\boldsymbol{\Delta t}=-n_2 A\frac{\Delta B}{U_{ind}}=-1800\cdot\frac{7{,}5}{10000}m^2\cdot\frac{1{,}117\cdot 10^{-3}\,T}{6\cdot 10^{-3}\,V}=\mathbf{0{,}2513\,s}$$

A: Nach 0,25 s ist die Induktionsspannung von 6 mV erreicht.

<u>1.2.2:</u> Wir verbinden die Enden der Induktionsspule über einen Widerstand. Im Inneren der Induktionsspule verringert sich daraufhin die Magnetfeldstärke um 50%. Berechne den Widerstand.

Durch den Widerstand fließt ein Strom. Dieser erzeugt im Inneren der Induktionsspule ein Magnetfeld, das dem äußeren Magnetfeld entgegengerichtet ist (Lenzsche Regel).

$$B_I=\frac{1}{2}B_A\Leftrightarrow\mu_0 I_2\frac{n_2}{l}=\frac{1}{2}\mu_0 I_1\frac{n_1}{l}\Leftrightarrow I_2=\frac{1}{2}\frac{n_1}{n_2}I_1=\frac{1}{2}\frac{400}{1800}\cdot 1\,A=\frac{1}{9}A$$

$$R=\frac{U}{I}=\frac{6\,mV}{\frac{1}{9}A}=54\,m\Omega$$

A: Der Widerstand muss 54 mΩ groß sein.

<u>1.3:</u> Nun steigt der Strom nach der Funktion $I(t)=\frac{t}{(t+1\mathrm{s})}\cdot 1\mathrm{A}$ an.

<u>1.3.1:</u> Berechne die induzierte Spannung nach 2 s.

$$B(t)=\mu_0 I(t)\frac{n_1}{l}=\mu_0\frac{n}{l}\cdot\frac{t}{(t+1\mathrm{s})}\cdot 1\mathrm{A}\qquad\Rightarrow\frac{d}{dt}B(t)=\mu_0\frac{n_1}{l}\cdot\left(\frac{1\,s}{(t+1\mathrm{s})^2}\right)\cdot 1\mathrm{A}$$

$$U_{ind}(t)=-n_2 A\frac{d\,B(t)}{dt}=-n_2 A\mu_0\frac{n_1}{l}\cdot\left(\frac{1\,s}{(t+1\mathrm{s})^2}\right)\cdot 1\mathrm{A}$$

$$\boldsymbol{U_{ind}(2\,s)}=-1800\cdot 7{,}5\cdot 10^{-4}m^2\,4\cdot\pi\cdot 10^{-7}\frac{V\,s}{A\,m}\cdot\frac{400}{0{,}45\,m}\cdot\left(\frac{1\,s}{(2\,s+1\mathrm{s})^2}\right)\cdot 1\mathrm{A}$$

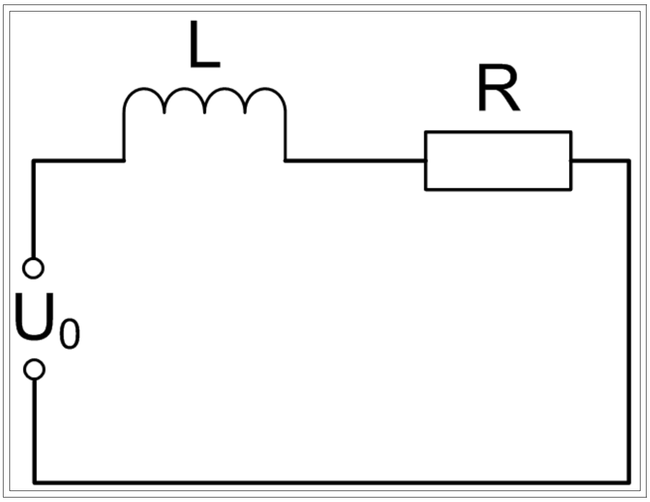
$$=-1{,}507964474\,m^2\frac{V\,s}{A\,m}\cdot\frac{1}{m}\cdot\left(\frac{1}{9\,s}\right)A=\mathbf{-1{,}675516082\cdot 10^{-4}\,V}$$

A: Die induzierte Spannung nach 2 s beträgt etwa 16,8 mV.

<u>Aufgabe 2:</u> Selbstinduktion

Gegeben ist die Schaltung rechts mit den folgenden Kennzahlen:

Spannung	$U_0 = -1000\,V$
Windungszahl Spule	$n = 100.000$
Länge Spule	$l = 20\,cm$
Innendurchmesser Spule	$d = 10\,cm$



<u>2.1:</u> Berechne die Induktivität L.

$(\,Kontrolle: L = 493{,}4802\,H\,)$

$$\boldsymbol{L} = \mu_0\,\mu_r\,n^2\,A\,l^{-1} = 4\pi\cdot 10^{-7}\,V\,s\,A^{-1}\,m^{-1}\cdot 1\cdot 100.000^2\cdot\pi\,(0{,}05\,m)^2\,(0{,}2\,m)^{-1} \approx 493{,}4802\,V\,s\,A^{-1} = \mathbf{493{,}4802}\,\boldsymbol{H}$$

A: Die Induktivität der Spule beträgt etwa 493 Henry.

<u>2.2:</u> Nach einiger Zeit stellt sich im Inneren der Spule ein konstantes Magnetfeldfeld von $B = -1{,}25664\ T$ ein. Berechne den Widerstand R. $(\,Kontrolle: R = 0{,}5\,k\,\Omega\,)$

$$B = \mu_0\,I\,\frac{n}{l} \quad\Leftrightarrow\quad I = \frac{B\,l}{\mu_0\,n} = \frac{1{,}25664\,T\cdot 0{,}2\,m}{4\,\pi\cdot 10^{-7}\,V\,s\,A^{-1}\,m^{-1}\cdot 100.000} = 2\,\frac{T\,m\,A\,m}{V\,s} = 2\,\frac{V\,s\,m^{-2}\,m\,A\,m}{V\,s} = -2\,A$$

$$U = R\,I \quad\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{R} = \frac{U}{I} = \frac{-1000\,V}{-2\,A} = \mathbf{500}\,\boldsymbol{\Omega}$$

A: Der Widerstand beträgt 0,5 kΩ.

<u>2.3:</u> Berechne die Stromstärke *1 s* nachdem die Spannung eingeschaltet wurde. (Wir nehmen an, die Spannungsquelle liefert sofort nach Einschalten genau U_0).

$$I(t) = -\frac{U_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \qquad \boldsymbol{I}\,(\mathbf{1}\,\boldsymbol{s}) = -\frac{-1000\,V}{500\,\Omega}\left(1 - e^{-\frac{500\,\Omega}{493{,}4802\,H}\cdot 1\,s}\right) = 2\,A\cdot\left(1 - e^{-1{,}0132\,\frac{V\,A}{A\,V\,s}\,s}\right) = \mathbf{1{,}2739}\,\boldsymbol{A}$$

A: Es fließen 1,27 A.

2.4: Berechne den Zeitpunkt nach Einschalten, bis das Magnetfeld im Inneren der Spule die Stärke $B=-1\,T$ erreicht.

$$B=\mu_0 I \frac{n}{l} \quad \Leftrightarrow \quad I=\frac{B\,l}{\mu_0 n}=\frac{-1\,T\cdot 0{,}2\,m}{4\pi\cdot 10^{-7}\,V\,s\,A^{-1}\,m^{-1}\cdot 100.000}=-1{,}591549\,\frac{T\,m\,A\,m}{V\,s}$$

$$=-1{,}591549\,\frac{V\,s\,m^{-2}\,m\,A\,m}{V\,s}=-1{,}591549\,A$$

$$-1{,}591549\,A=-\frac{U_0}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t_1}\right)$$

$$I(t_1)=I_1=-1{,}591549\,A$$

$$I_1=-I_0\left(1-e^{-\frac{R}{L}t_1}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{I_1}{I_0}=-1+e^{-\frac{R}{L}\cdot t_1} \quad |+1$$

$$\Leftrightarrow \frac{I_1}{I_0}+1=e^{-\frac{R}{L}\cdot t_1} \quad |\ln$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{I_1}{I_0}+1\right)=-\frac{R}{L}\cdot t_1 \quad | \quad \cdot\left(-\frac{L}{R}\right)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{L}{R}\cdot\ln\left(\frac{I_1}{I_0}+1\right)=t_1$$

Zahlen einsetzen:

$$t_1=-\frac{493{,}4802\,H}{500\,\Omega}\cdot\ln\left(\frac{-1{,}591549\,A}{2\,A}+1\right)=1{,}5678\,s$$

A: Nach 1,57 s hat das Magnetfeld die Stärke von -1 T.

2.5: Nach einiger Zeit wird die Spannung wieder ausgeschaltet (U_0 sinkt sofort auf null). Berechne die Gesamtladung Q, die jetzt noch fließen kann.

Ausschaltvorgang: $I(t)=-\frac{U_0}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$ $\quad Q=\int I(t)\,dt$

$$\boldsymbol{Q(t\to\infty)}=\int_0^\infty I(t)\,dt=\int_0^\infty -\frac{U_0}{R}e^{-\frac{R}{L}t}\,dt=\frac{-U_0}{R}\cdot\int_0^\infty e^{-\frac{R}{L}t}\,dt=\frac{-U_0}{R}\left[-\frac{L}{R}\cdot e^{-\frac{R}{L}\cdot t}\right]_0^\infty$$

$$=-\frac{U_0}{R}\left(0-(-\frac{L}{R}\cdot 1)\right)=-\frac{U_0 L}{R^2}=-\frac{-1000\,V\cdot 493{,}4802\,H}{500^2\,\Omega^2}=1{,}97\,V\,\frac{V\,s}{A}\cdot\frac{A^2}{V^2}=\mathbf{1{,}97\,A\,s}$$

A: Es können noch etwas weniger als 2 C fließen.

Physik LK 12, Klausur 04 – Induktion - Lösung **20.05.2011**

<u>Aufgabe 3:</u> Maxwell-Gleichungen

<u>3.1:</u> Was ist ein Verschiebungsstrom?

Die Veränderung eines elektrischen Feldes durch eine Fläche entspricht mathematisch einem Stromfluss. $I_V = \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_A \vec{E}\, d\vec{A}$ Dieser wird Verschiebungsstrom genannt.

<u>3.2</u>: Warum wurde der Verschiebungsstrom postuliert? Beschreibe ein passendes Experiment.

Beim Aufladevorgang eines Kondensators entsteht nicht nur um die Zuleitungen ein Magnetfeld, sondern auch zwischen den Kondensatorplatten, wo keine Ladungen bewegt werden. Dieses Magnetfeld muss ebenfalls durch einen Strom hervorgerufen werden, der allerdings anderer Natur sein muss, als der Stromfluss bewegter Ladungen. Dieser „neuartige" Strom wurde von Maxwell Verschiebungsstrom genannt.

<u>3.3</u> In welchem physikalischen Gesetz taucht der Verschiebungsstrom auf? Stelle die Formel auf und beschreibe die physikalische Aussage dazu.

3. Maxwell'sche Gleichung $\oint \vec{B}\, d\vec{s} = \mu_0 \left(I + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_A \vec{E}\, d\vec{A} \right)$

Induktionsgesetz von Faraday: Zeitliche Änderungen des magnetischen Feldes führen zu einem elektrischen Wirbelfeld.

<u>3.4:</u> Gegeben ist ein zeitabhängiges elektrisches Feld $E(t) = E_0 \cdot \sin(\pi/4 \cdot t)$ mit $E_0 = 12\,\pi^{-1} N\, C^{-1}$. Berechne den Verschiebungsstrom durch eine quadratische Fläche mit der Kantenlänge $a = 10\,cm.$

$$I_V = \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_A E(t)\, d\vec{A} = \epsilon_0 \frac{d}{dt} E(t) \int_0^{0{,}01\,m^2} 1\, d\vec{A} = \frac{d\left(\epsilon_0 E_0 \cdot \sin(\pi/4 \cdot t)\right)}{dt} \cdot 0{,}01\,m^2$$

$$= \epsilon_0 E_0 \frac{d\left(\sin(\pi/4 \cdot t)\right)}{dt} \cdot 0{,}01\,m^2 = \epsilon_0 \frac{12}{\pi} \frac{N}{C} \frac{\pi}{4} \cdot \cos(\pi/4 \cdot t) \cdot 0{,}01\,m^2 = \boldsymbol{\epsilon_0 \cdot 0{,}03 \frac{N\,m^2}{C} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot t\right)}$$

<u>3.5</u> Stelle eine Maxwell-Gleichung deiner Wahl auf, die in den bisherigen Teilaufgaben noch nicht vorkam. Beschreibe die physikalische Aussage dazu.

1. Maxwellsche Gleichung $\oint_A \vec{D}\, d\vec{A} = Q$

Erweitertes ampèresches Gesetz: Elektrische Ströme - einschließlich einer zeitlichen Änderung des elektrischen Felds - führen zu einem magnetischen Wirbelfeld.

oder

2. Maxwellsche Gleichung $\oint_A \vec{B}\, d\vec{A} = 0$

Gaußsches Gesetz für den Magnetismus: Es gibt keine Quellen für Magnetfelder, beziehungsweise Magnetfelder haben nur geschlossene Feldlinien.

oder

4. Maxwellsche Gleichung $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B}\, d\vec{A}$

Gaußsches Gesetz für elektrische Felder: Elektrische Ladungsträger sind Quellen und Senken des elektrischen Feldes, also Anfang und Ende für elektrische Feldlinien.