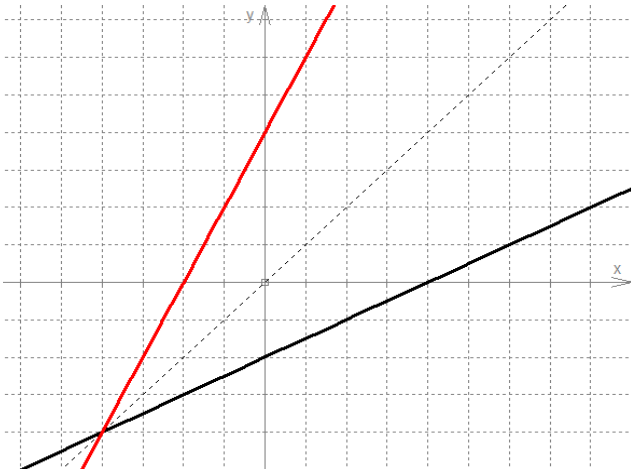
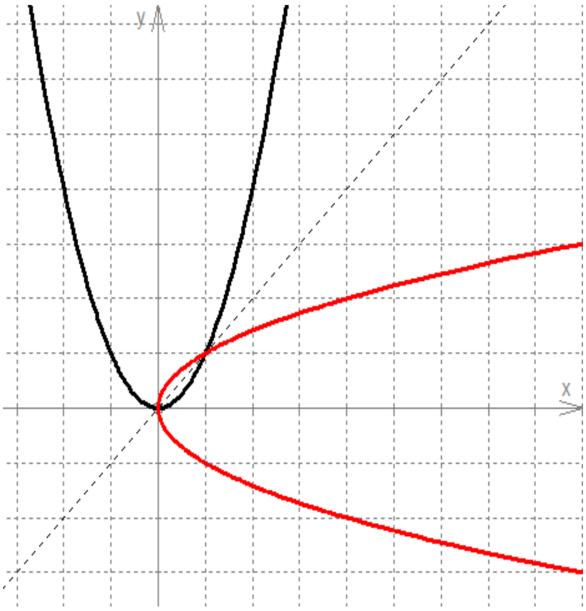
Mathematik GK 11 m1, AB 02 – Umkehrfunktionen (und NST) – Lösung 09.09.2019

<u>Aufgabe 1:</u> Bestimme zeichnerisch die Umkehrabbildung zu den folgenden Funktionsgraphen. Entscheide, ob es sich um eine Umkehrfunktion handelt.

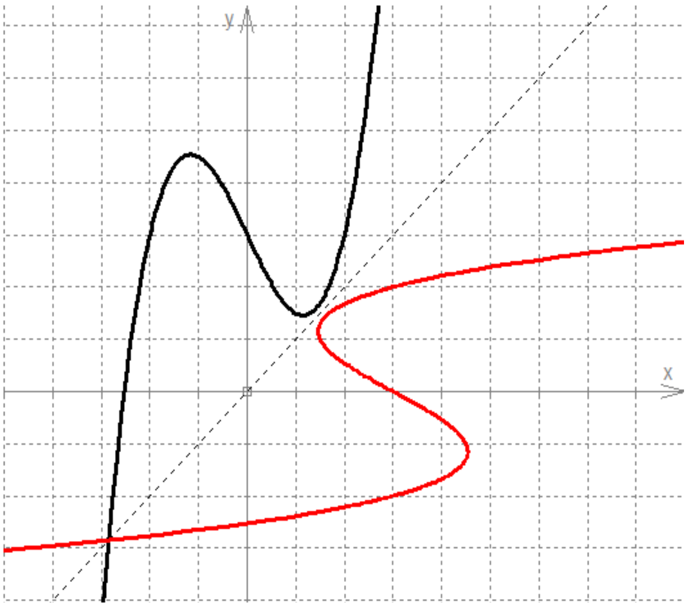
<u>1.1</u> Funktion



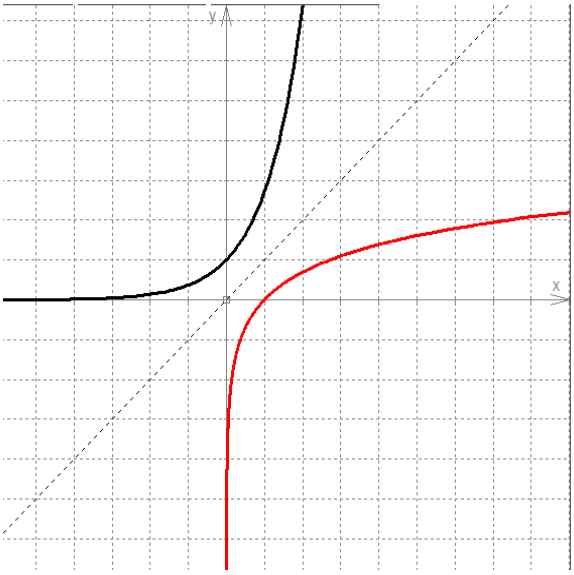
<u>1.2</u> keine Funktion



<u>1.3</u> keine Funktion



<u>1.4</u> Funktion



Mathematik GK 11 m1, AB 02 – Umkehrfunktionen (und NST) – Lösung 09.09.2019

<u>Aufgabe 2:</u> Bilde rechnerisch die Umkehrabbildung zu den gegeben Funktionen. Begründe mit Hilfe der Rechnung, ob es sich um eine Umkehrfunktion handelt.

<u>2.1</u> $f(x)=-\frac{1}{2}x+2$

$$y=-\frac{1}{2}x+2 \quad | -2$$
$$\Leftrightarrow \quad y-2=-\frac{1}{2}x \quad | :\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad -2(y-2)=x \quad | T$$
$$\Leftrightarrow \quad -2y+4=x$$

Umkehrfunktion: $\boldsymbol{f(x)=-2x+4}$

<u>2.2</u> $f(x)=2x^2-32$

$$y=2x^2-32 \quad | +32$$
$$\Leftrightarrow \quad y+32=2x^2 \quad | :2$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}y+16=x^2 \quad | \sqrt{\ }$$
$$\Rightarrow \quad \pm\sqrt{\frac{1}{2}y+16}=x_{1/2}$$

<u>Keine</u> Umkehrfunktion, da nicht eindeutig.

<u>2.3</u> $f(x)=x^3-8$

$$y=x^3-8 \quad | +8$$
$$\Leftrightarrow \quad y+8=x^3 \quad | \sqrt[3]{\ } \ oder \ ^{\frac{1}{3}}$$
$$\Leftrightarrow \quad \sqrt[3]{y+8}=x$$

Umkehrfunktion: $\boldsymbol{f(x)=\sqrt[3]{x+8}}$

<u>2.4</u> $f(x)=\frac{1}{3}x^2-2x+2$

$$y=\frac{1}{3}x^2-2x+2 \quad | -y$$
$$\Leftrightarrow \quad 0=\frac{1}{3}x^2-2x+2-y \quad | \cdot 3$$
$$\Leftrightarrow \quad 0=x^2-6x+6-3y$$

p-q-Formel (q = 6 – 3y)

$$\Rightarrow \quad x_{1/2}=3\pm\sqrt{9-(6-3y)}=3\pm\sqrt{3+3y}$$

<u>Keine</u> Umkehrfunktion, da nicht eindeutig.

<u>2.5</u> $f(x)=\frac{1}{x}$

$$y=\frac{1}{x} \quad | \cdot\frac{x}{y} \ oder \ ^{-1}$$
$$\Leftrightarrow \quad x=\frac{1}{y}$$

Umkehrfunktion: $\boldsymbol{f(x)=\frac{1}{x}}$

(Definitionsbereich $D=\mathbb{R}\subset\{0\}$)

2.6 $f(x)=2^x$

$$y=2^x \quad | \log_2()$$
$$\Leftrightarrow \quad \log_2(y)=\log_2(2^x) \quad | T$$
$$\Leftrightarrow \quad \log_2(y)=x$$

Umkehrfunktion: $\boldsymbol{f(x)=\log_2(x)}$

(Definitionsbereich $D=\mathbb{R}^+$)

<u>2.7</u> $f(x)=e^x+2$

$$y=e^x+2 \quad | -2$$
$$\Leftrightarrow \quad y-2=e^x \quad | \ln()$$
$$\Leftrightarrow \quad \ln(y-2)=\ln(e^x) \quad | T$$
$$\Leftrightarrow \quad \ln(y-2)=x$$

Umkehrfunktion: $\boldsymbol{f(x)=\ln(x-2)}$

(Definitionsbereich $x\in\mathbb{R}; x>2$)

Mathematik GK 11 m1, AB 02 – Umkehrfunktionen (und NST) – Lösung 09.09.2019

Aufgabe 3: Bestimme – falls möglich – die Nullstellen der Funktionen aus Aufgabe 2.

3.1 $f(x)=-\frac{1}{2}x+2$ $0=-\frac{1}{2}x_n+2 \quad \mid -2$ $\Leftrightarrow \; -2=-\frac{1}{2}x_n \quad \mid :\left(-\frac{1}{2}\right)$ $\Leftrightarrow \; 4=x_n \quad \mid T$ Nullstelle: $\boldsymbol{x_n=4}$	**3.2** $f(x)=2x^2-32$ $0=2x_n^2-32 \quad \mid +32$ $\Leftrightarrow 32=2x_n^2 \quad \mid :2$ $\Leftrightarrow 16=x_n^2 \quad \mid \sqrt{\;}$ $\Leftrightarrow \pm\sqrt{16}=x_{1/2}$ $\Leftrightarrow x_{1/2}=\pm 4$ Nullstellen: $\boldsymbol{x_1=-4;\; x_2=4}$
3.3 $f(x)=x^3-8$ $0\,y=x_n^3-8 \quad \mid +8$ $\Leftrightarrow \; 8=x_n^3 \quad \mid \sqrt[3]{\;}\; oder \;^{\frac{1}{3}}$ $\Leftrightarrow \; \sqrt[3]{8}=x_n$ $\Leftrightarrow \; x_n=2$ Nullstelle: $\boldsymbol{x_n=4}$	**3.4** $f(x)=\frac{1}{3}x^2-2x+2$ $0=\frac{1}{3}x_n^2-2x_n+2 \quad \mid \cdot 3$ $\Leftrightarrow 0=x_n^2-6x_n+6$ p-q-Formel oder quadratische Ergänzung $\Rightarrow x_{1/2}=3\pm\sqrt{9-6}=3\pm\sqrt{3}$ Nullstellen: $\boldsymbol{x_1=3-\sqrt{3};\; x_2=3+\sqrt{3}}$
3.5 $f(x)=\frac{1}{x}$ $0=\frac{1}{x_n} \quad \mid \cdot\frac{x_n}{y} \; oder \;^{-1}$ $\Leftrightarrow x_n=\frac{1}{0}$ geht nicht **Die Funktion hat keine Nullstellen!**	**3.6** $f(x)=2^x$ $0=2_n^x \quad \mid \log_2()$ $\Leftrightarrow \; \log_2(0)=x$ geht nicht **Die Funktion hat keine Nullstellen!**
3.7 $f(x)=e^x+2$ $0=e_n^x+2 \quad \mid -2$ $\Leftrightarrow \; -2=e_n^x \quad \mid \ln()$ $\Leftrightarrow \ln(-2)=x_n$ geht nicht **Die Funktion hat keine Nullstellen!**	