Mathematik LK 12 M1, 1. Kursarbeit – Integration – Lösung **06.10.2016**

Aufgabe 1: Berechne

1.1 $\int e^{2x}\,dx = \mathbf{\frac{1}{2}e^{2x}} + C$

1.2 $\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cos(x)\,dx = [\sin(x)]_{-0{,}5\pi}^{0{,}5\pi} = \sin(0{,}5\pi) - \sin(-0{,}5\pi) = 1-(-1) = \mathbf{2}$

1.3 $\int \frac{1}{2x+1}\,dx = \mathbf{\frac{1}{2}\cdot\ln(2x+1)} + C$

1.4 $\int_{-4}^{-2} e^{\ln(x)}\,dx = \int_{-4}^{-2} x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-4}^{-2} = \frac{1}{2}(-4)^2 - \frac{1}{2}(-2)^2 = 8-2 = \mathbf{6}$

Aufgabe 2: Berechne den Flächeninhalt der Fläche zwischen dem Graphen der Funktion f und der x-Achse im Intervall $[a;b]$.

2.1 $f(x) = \cos(x)$; $a = -\pi$; $b = \pi$

Nullstellen von des Kosinus innerhalb des Intervalls $[-\pi;\pi]$: $\cos(0{,}5\pi)=0$ und $\cos(-0{,}5\pi)=0$, also $x_{n1}=-0{,}5\pi$ und $x_{n2}=0{,}5\pi$.

Also $A = A_1+A_2+A_3+A_4 = \left|\int_{-\pi}^{-0{,}5\pi}\cos(x)\,dx\right| + \left|\int_{-0{,}5\pi}^{0}\cos(x)\,dx\right| + \left|\int_{0}^{0{,}5\pi}\cos(x)\,dx\right| + \left|\int_{0{,}5\pi}^{\pi}\cos(x)\,dx\right|$

Weil der Kosinus achsensymmetrisch zur y-Achse ist, gilt: $A_1+A_2 = A_3+A_4$

(Ohne Berücksichtung der Symmetrie kann man die Flächen A_3 und A_4 zusammenfassen und muss dann drei Teilflächen berechnen).

Es genügt also A_1 und A_2 zu berechnen.

$$A_1 = \left|\int_{-\pi}^{-0{,}5\pi}\cos(x)\,dx\right| = \left|[\sin(x)]_{-\pi}^{-0{,}5\pi}\right| = |\sin(-0{,}5\pi)-\sin(-\pi)| = |-1-0| = |-1| = 1$$

$$A_2 = \left|\int_{-0{,}5\pi}^{0}\cos(x)\,dx\right| = \left|[\sin(x)]_{-0{,}5\pi}^{0}\right| = |\sin(0)-\sin(-0{,}5\pi)| = |0-(-1)| = |1| = 1$$

Also $A = A_1+A_2+A_3+A_4 = 2A_1+2A_3 = 2\cdot 1+2\cdot 1 = \mathbf{4}$

A: Der Flächeninhalt beträgt 4 F.E. .

<u>2.2</u> $f(x)=(x-2)(x+1)(x-4)\ ;\ a=1{,}5\ ;\ b=4{,}5$

$f(x)=(x-2)(x+1)(x-4)=x^3-5x^2+2x+8$ Die Nullstellen sind: $x_1=-1\,;x_2=2\,;x_3=4$

Zur Flächenberechnung muss das Integral also unterteilt werden:

$$A=A_1+A_2+A_3=\left|\int_{1,5}^{2} x^3-5x^2+2x+8\,dx\right|+\left|\int_{2}^{4} x^3-5x^2+2x+8\,dx\right|+\left|\int_{4}^{4,5} x^3-5x^2+2x+8\,dx\right|$$

$$A_1=\left|\int_{1,5}^{2} x^3-5x^2+2x+8\,dx\right|=\left|\left[\frac{x^4}{4}-\frac{5}{3}x^3+x^2+8x\right]_{1,5}^{2}\right|=\left|\frac{2^4}{4}-\frac{5\cdot 2^3}{3}+2^2+8\cdot 2-\left(\frac{1{,}5^4}{4}-\frac{5\cdot 1{,}5^3}{3}+1{,}5^2+8\cdot 1{,}5\right)\right|$$
$$=\left|\frac{32}{3}-\frac{633}{64}\right|=\left|\frac{149}{192}\right|\approx 0{,}7760$$

$$A_2=\left|\int_{2}^{4} x^3-5x^2+2x+8\,dx\right|=\left|\left[\frac{x^4}{4}-\frac{5}{3}x^3+x^2+8x\right]_{2}^{4}\right|=\left|\frac{4^4}{4}-\frac{5\cdot 4^3}{3}+4^2+8\cdot 4-\frac{32}{3}\right|=\left|\frac{16}{3}-\frac{32}{3}\right|=\left|\frac{-16}{3}\right|=\frac{16}{3}\approx 5{,}33$$

$$A_3=\left|\int_{4}^{4,5} x^3-5x^2+2x+8\,dx\right|=\left|\left[\frac{x^4}{4}-\frac{5}{3}x^3+x^2+8x\right]_{2}^{4}\right|=\left|\frac{4{,}5^4}{4}-\frac{5\cdot 4{,}5^3}{3}+4{,}5^2+8\cdot 4{,}5-\frac{16}{3}\right|=\left|\frac{441}{64}-\frac{16}{3}\right|$$
$$=\left|\frac{299}{192}\right|\approx 1{,}5573$$

$$A=A_1+A_2+A_3=\frac{149}{192}+\frac{16}{3}+\frac{299}{192}=\mathbf{\frac{23}{3}}\approx 7{,}67$$

A: Der Flächeninhalt beträgt 7,67 F.E. .

<u>Aufgabe 3:</u> Berechne den Flächeninhalt der eingeschlossenen Fläche zwischen den Graphen der Funktionen $f(x)=x^3-6x^2+9x$ und $g(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x$

Der Flächeninhalt ist zwischen den Schnittstellen der Funktionen bzw. zwischen den Nullstellen der Differenzfunktion eingeschlossen.

Differenzfunktion $h(x)=f(x)-g(x)=x^3-6x^2+9x-\left(\frac{1}{2}x^2+2x\right)=x^3-5{,}5x^2+7x$

Nullstellen der Differenzfunktion: $0=x_n^3-5{,}5x_n^2+7x_n=x_n(x_n^2-5{,}5x_n+7)$

$\Rightarrow x_1=0$ Betrachte Klammer: $0=x_n^2-5{,}5x_n+7$ p-q-Formel:

$x_{2/3}=2{,}75\pm\sqrt{(-2{,}75)^2-7}=\sqrt{\frac{121}{16}-\frac{112}{16}}=2{,}75\pm\frac{\sqrt{9}}{16}=2{,}75\pm\frac{3}{4}\quad\Rightarrow x_2=2{,}75-0{,}75=2;\ x_3=2{,}75+0{,}75=3{,}5$

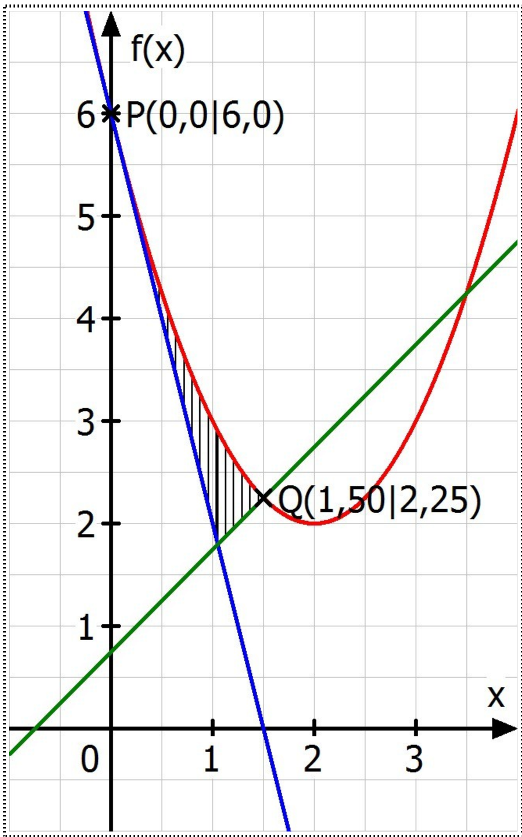
Also $A=A_1+A_2=\left|\int_0^2 h(x)\,dx\right|+\left|\int_2^{3{,}5} h(x)\,dx\right|$

$$A_1=\left|\int_0^2 h(x)\,dx\right|=\left|\int_0^2 x^3-5{,}5x^2+7x\,dx\right|=\left|\left[\frac{x^4}{4}-\frac{5{,}5}{3}x^3+\frac{7}{2}x^2\right]_0^2\right|$$
$$=\left|\frac{2^4}{4}-\frac{11\cdot 2^3}{6}+\frac{7\cdot 2^2}{2}-(0-0+0+0)\right|=\left|4-\frac{44}{3}+14\right|=\left|\frac{10}{3}\right|=\frac{10}{3}$$

$$A_2=\left|\int_2^{3{,}5} h(x)\,dx\right|=\left|\int_2^{3{,}5} x^3-5{,}5x^2+7x\,dx\right|=\left|\left[\frac{x^4}{4}-\frac{5{,}5}{3}x^3+\frac{7}{2}x^2\right]_2^{3{,}5}\right|$$
$$=\left|\frac{3{,}5^4}{4}-\frac{11\cdot 3{,}5^3}{6}+\frac{7\cdot 3{,}5^2}{2}-\frac{10}{3}\right|=\left|\frac{2401}{64}-\frac{3773}{48}+\frac{343}{8}-\frac{10}{3}\right|=\left|\frac{343}{192}-\frac{10}{3}\right|=\left|-\frac{99}{64}\right|=\frac{99}{64}=1{,}546875$$

$\boldsymbol{A}=A_1+A_2=\frac{10}{3}+\frac{99}{64}=\boldsymbol{\frac{937}{192}}\approx 4{,}8802$ **A: Der Flächeninhalt beträgt 4,88 F.E. .**

<u>**Aufgabe 4:**</u> Berechne den Flächeninhalt der eingeschlossenen Fläche zwischen dem Graphen der Funktion $f(x)=x^2-4x+6$, der Tangenten von *f* im Punkt $P(0|6)$ und der Normalen von *f* im Punkt $Q(1{,}5|2{,}25)$.



Berechnung der Tangenten und Normalen

Ableitung: $f'(x)=2x-4$ Tangentensteigung: $m_t=f'(0)=-4$

Tangentengleichung: $g(x)=m_t x+n_t$;
Punkt $P(0|6)$ einsetzen:
$6=-4\cdot 0+n_t \Leftrightarrow n_t=6$ Damit $g(x)=-4x+6$

Normalensteigung: $m_n=\frac{-1}{f'(1{,}5)}=-\frac{1}{-1}=1$

Normalengleichung: $h(x)=m_n x+n_n$;
Punkt $Q(1{,}5|2{,}25)$ einsetzen:
$2{,}25=1\cdot 1{,}5+n_t \Leftrightarrow n_t=0{,}75$ Damit $h(x)=x+0{,}75$

Die gesuchte Fläche liegt von *0* bis zur Schnittstelle von Tangente und Normale zwischen dem Graphen von *f* und der Tangenten und von der Schnittstelle bis *1,5* zwischen dem Graphen von *f* und der Normalen.

Schnittstelle zwischen *g* und *h*:

$$g(x_S)=h(x_S) \;\Leftrightarrow\; -4x_S+6=x_S+0{,}75 \;\Leftrightarrow\; -5x_S=-5{,}25 \;\Leftrightarrow\; x_S=1{,}05$$

$$A=A_1+A_2=\left|\int_0^{1,05} f(x)-g(x)\,dx\right|+\left|\int_{1,05}^{1,5} f(x)-h(x)\right|$$

$$A_1=\left|\int_0^{1,05} x^2-4x+6-(-4x+6)\,dx\right|=\left|\int_0^{1,05} x^2\,dx\right|=\left|\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{1,05}\right|=\left|\frac{1{,}05^3}{3}-0\right|=\left|\frac{3087}{8000}\right|=\frac{3087}{8000}=0{,}388572$$

$$A_2=\left|\int_{1,05}^{1,5} x^2-4x+6-(x+0{,}75)\,dx\right|=\left|\int_{1,05}^{1,5} x^2-5x+5{,}25\,dx\right|=\left|\left[\frac{x^3}{3}-\frac{5}{2}x^2+5{,}25x\right]_{1,05}^{1,5}\right|$$
$$=\left|\frac{1{,}5^3}{3}-\frac{5}{2}1{,}5^2+5{,}25\cdot1{,}5-\left(\frac{1{,}05^3}{3}-\frac{5}{2}1{,}05^2+5{,}25\cdot1{,}05\right)\right|=\left|\frac{27}{8}-3{,}142125\right|=\left|\frac{1863}{8000}\right|=0{,}232875$$

$$\boldsymbol{A}=A_1+A_2=\frac{3087}{8000}+\frac{1863}{8000}=\frac{\mathbf{99}}{\mathbf{160}}=0{,}61875$$

A: Der Flächeninhalt beträgt 0,62 F.E. .

<u>Aufgabe 5:</u> Uneigentliche Integrale

<u>**5.1**</u> Untersuche, ob die Fläche zwischen dem Graphen der Funktionen $f(x)=e^x$ und der x-Achse für $x\leq 0$ endlich ist und berechne ggf. den Flächeninhalt.

Die natürliche Exponentialfunktion hat keine Nullstellen, daher müssen zur Flächenberechnung keine Integrale unterteilt werden.

$$\boldsymbol{A}=\int_{-\infty}^{0} e^x\,dx=\lim_{a\to-\infty}\left[e^x\right]_a^0=e^0-\lim_{x\to-\infty}e^x=1-0=\mathbf{1}$$

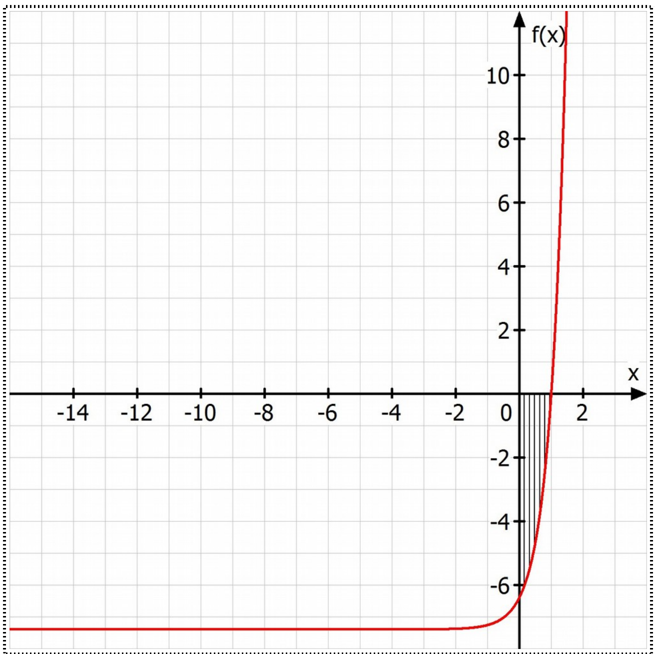
<u>**5.2**</u> Gegeben ist die Funktion *f* mit
$f(x)=-e^2+e^{2x}$

<u>**5.2.1**</u> Skizziere den prinzipiellen Verlauf des Funktionsgraphen.

(siehe rechts)

<u>**5.2.2**</u> Berechne den Inhalt der Fläche, die vom Graphen von *f* und den Koordinatenachsen vollständig eingeschlossen wird.

Die Fläche wird rechts durch die Nullstelle der Funktion begrenzt.

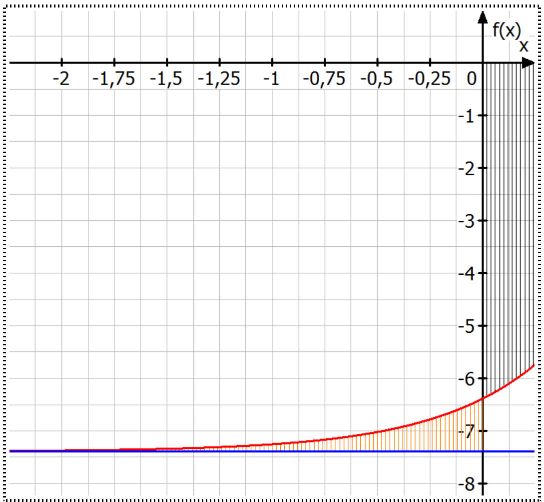


$$0=-e^2+e^{2x_n} \Leftrightarrow +e^2=e^{2x_n} \quad | \ \ln()$$
$$\Leftrightarrow \ 2=2x_n \ \Leftrightarrow \ x_n=1$$

$$\boldsymbol{A}=\left|\int_0^1 -e^2+e^{2x}dx\right|=\left|\left[-e^2x+\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1\right|=\left|-e^2+\frac{e^2}{2}-\left(0+\frac{1}{2}\right)\right|=\left|\frac{-e^2}{2}-\frac{1}{2}\right|\approx|-4{,}194528049|\approx\mathbf{4{,}1945}$$

A: Der Flächeninhalt beträgt 4,19 F.E. .

__5.2.3__ Die waagerechte Asymptote von *f* hat die Gleichung $y=-e^2$. Gemeinsam mit den Koordinatenachsen und dem Graphen von *f* schließt die Asymptote eine Fläche ein, die ins Unendliche reicht. Zeige, dass diese Fläche einen endlichen Flächeninhalt besitzt und berechne diesen.

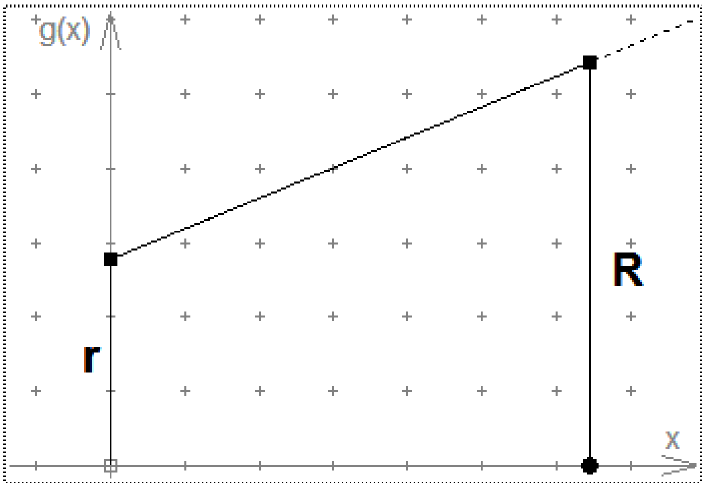


Differenzfunktion $h(x)=f(x)-(-e^2)=-e^2+e^{2x}+e^2=e^{2x}$

$$\boldsymbol{A}=\left|\int_{-\infty}^0 e^{2x}dx\right|=\left|\lim_{a\to-\infty}\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_a^0\right|=\left|\frac{e^0}{2}-\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}}{2}\right|=\left|\frac{1}{2}-0\right|=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

A: Der Flächeninhalt beträgt 0,5 F.E. .

__**Aufgabe 6:**__ Stelle mit Hilfe der Integralrechnung eine Formel zur Berechnung eines Kegelstumpfes mit der Höhe *h,* dem Radius *R* der Grundfläche und dem Radius r_1 der Deckfläche.



Kontrolllösung: $V=\frac{\pi}{3}\cdot h\cdot(R^2+Rr+r^2)$

Die betrachtete Funktion ist eine Gerade durch den Ursprung $g(x)=mx+n$ mit $m=\frac{R-r}{h}$ und $n=r$, also $g(x)=\frac{R-r}{h}x+r$.

Das Volumen des Rotationskörpers ist

$$\boldsymbol{V}=\pi\int_0^h g(x)^2dx=V=\pi\int_0^h\left(\frac{(R-r)}{h}x+r\right)^2dx=\pi\int_0^h\frac{(R-r)^2}{h^2}x^2+2\frac{(R-r)}{h}xr+r^2dx$$

$$=\pi\left[\frac{(R-r)^2}{3h^2}x^3+2\frac{(R-r)r}{2h}x^2+r^2x\right]_0^h=\pi\cdot\left(\frac{(R-r)^2}{3h^2}h^3+\frac{(R-r)r}{h}h^2+r^2h-(0+0+0)\right)$$

$$=\pi\left(\frac{1}{3}(R-r)^2h+(R-r)rh+r^2h\right)=\pi h\left(\frac{1}{3}(R-r)^2+(R-r)r+r^2\right)=\frac{1}{3}\pi h\left((R-r)^2+3(R-r)r+3r^2\right)$$
$$=\frac{1}{3}\pi h\left(R^2-2Rr+r^2+3Rr-3r^2+3r^2\right)=\boldsymbol{\frac{1}{3}\pi h\left(R^2+Rr+r^2\right)}$$

<u>Aufgabe 7:</u> Gegeben sind die Graphen der Funktionen der Funktionsschar $f_t(x)=x^3-tx, t\in\mathbb{R}$ und die Graphen der jeweiligen Tangenten durch den Punkt $(1|f_t(1))$. Wir betrachten wir nun den Flächeninhalt der Fläche, die für ein gegebenes *t* von den beiden Graphen und den Senkrechten $x_1=0$ sowie $x_2=1$ eingeschlossen wird.

Berechne den Wert für t, bei dem dieser Flächeninhalt den Wert $A=3\,F.E.$ einnimmt.

Hinweis: Es gibt im betrachteten Intervall keinen Schnittpunkt zwischen dem Funktionsgraphen und der Tangeten. Dies darf in der Rechnung benutzt werden.

Berechnung der Tangenten:

Funktionsgleichung der Tangenten: $g_t(x)=mx+n$

Berührpunkt hat y-Koordinate $f_t(1)=1^3-t\cdot 1=1-t$

Ableitung: $f_t(x)=3x^2-t$ Steigung der Tangenten: $m=f_t'(1)=3\cdot 1^2-t=3-t$

Berechnung von n durch Einsetzen von $(1|1-t)$ in die Geradengleichung

$$1-t=m\cdot 1+n \;\Leftrightarrow\; 1-t=3-t+n \;\Leftrightarrow\; -2=n$$

Also Tangentengleichung: $g_t(x)=(3-t)\cdot x-2$

Bilden der Differenzfunktion

$$h_t(x)=f_t(x)-g_t(x)=x^3-tx-\left((3-t)\cdot x-2\right)=x^3-(tx+(3-t)\cdot x)+2=x^3-x\cdot(t+(3-t))+2=x^3-3x+2$$

Die Differenzfunktion ist also für alle Parameter *t* gleich! Somit ist auch der Flächeninhalt der betrachteten Fläche immer gleich. Es gibt also unendlich viele Lösungen für t, falls der Flächeninhalt $A=3\,F.E.$ beträgt oder keine Lösung, falls das nicht der Fall ist.

Weil es keinen Schnittpunkt zwischen den Graphen gibt, können wir die Fläche mit einem Integral berechnen.

$$A=\left|\int_0^1 h(x)\,dx\right|=\left|\int_0^1 x^3-3x+2\,dx\right|=\left|\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_0^1\right|=\left|\frac{1}{4}\cdot 1^4-\frac{3}{2}1^2+2\cdot 1-(0)\right|=\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+2=\left|\frac{3}{4}\right|=0{,}75$$

Der Flächeninhalt beträgt immer 0,75 F.E.

A: Es gibt kein t, für das der gesuchte Flächeninhalt 3 F.E. beträgt.