Mathematik LK 12 M2, HÜ Nr. 1 – Flächenberechnung – Lösung **14.09.2016**

Aufgabe 1: Gegeben ist die Funktion $f(x)=x^2-4x+3$. Berechne den Flächeninhalt der Fläche, die durch den Graphen von *f* und den beiden Tangenten durch die Schnittpunkte von *f* mit der x-Achse begrenzt wird.

Berechnung der Nullstellen: $0=x_n^2-4x_n+3$

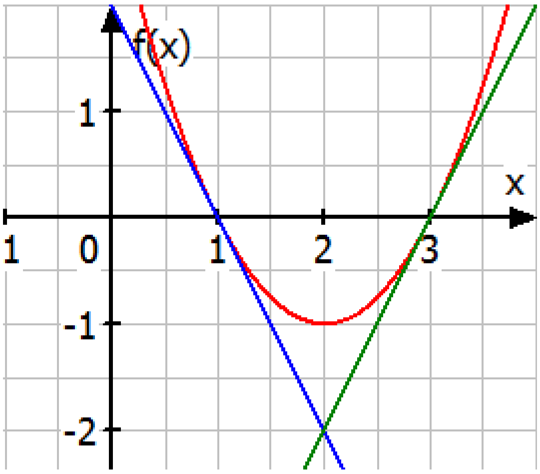
Mit p-q-Formel: $x_{1/2}=2\pm\sqrt{2^2-3}=2\pm1 \Rightarrow x_1=2-1=1; x_2=2+1=3$

Berechnung der Tangensteigungen $m_x=f'(x)$

$f(x)=x^2-4x+3 \Rightarrow f'(x)=2x-4 \quad m_1=f'(1)=2\cdot1-4=-2 \;;\; m_2=f'(3)=2\cdot3-4=2$

Tangengleichung: $g(x)=mx+n$. Der Punkt $(1|0)$ liegt auf dem Graphen der 1. Tangente und der Punkt $(3|0)$ liegt auf dem Graphen der zweiten Tangente. Einsetzen:

$0=-2\cdot1+n_1 \Leftrightarrow n_1=2 \;;\; 0=2\cdot3+n_2 \Leftrightarrow n_2=-6$ Also $g_1(x)=-2x+2 \;;\; g_2(x)=2x-6$ Skizze:



Wir teilen die zu berechnende Fläche an der Senkrechten durch den Schnittpunkt der beiden Tangenten.

Berechnung des Schnittpunktes:

$$-2x_S+2=2x_S-6 \quad | +6+2x_S$$
$$\Leftrightarrow \quad 8=4x_S \Leftrightarrow x_S=2$$

$g_1(x_S)=-2\cdot2+2=-2$ Also Schnittpunkt $(2|-2)$

$$A_1=\left|\int_1^2 (f(x)-g_1(x))\,dx\right|=\left|\int_1^2 x^2-4x+3-(-2)x-2\,dx\right|$$
$$=\left|\int_1^2 x^2-2x+1\,dx\right|=\left|\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_1^2\right|=\left|\frac{1}{3}\cdot2^3-2^2+2-\left(\frac{1}{3}\cdot1^3-1^2+1\right)\right|=\left|\frac{8}{3}-2-\frac{1}{3}\right|=\left|\frac{7}{3}-\frac{6}{3}\right|=\left|\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{3}$$

$$A_2=\left|\int_2^3 (f(x)-g_2(x))\,dx\right|=\left|\int_2^3 x^2-4x+3-2x+6\,dx\right|$$
$$=\left|\int_2^3 x^2-6x+9\,dx\right|=\left|\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x\right]_1^2\right|=\left|\frac{1}{3}\cdot3^3-3\cdot3^2+9\cdot3-\left(\frac{1}{3}\cdot2^3-3\cdot2^2+9\cdot2\right)\right|$$
$$=\left|\frac{27}{3}-27+27-\frac{8}{3}+12-18\right|=\left|9-\frac{8}{3}-6\right|=\left|3-\frac{8}{3}\right|=\left|\frac{9}{3}-\frac{8}{3}\right|=\left|\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{3}$$

$$\boldsymbol{A}=A_1+A_2=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

A: Die eingeschlossene Fläche hat den Flächeninhalt $\frac{2}{3}$ F.E.