Mathematik GK 13 m2, HÜ Nr. 1 – Schnitte Geraden/Ebenen – Lösung A 15.09.2016

<u>Aufgabe 1:</u> Überprüfe, wie sich die jeweiligen Geraden bzw. Ebenen im dreidimensionalen Raum begegnen. Falls sie sich schneiden, berechne den jeweiligen Schnittpunkt bzw. die jeweilige Schnittgerade.

<u>1.1</u> $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix}$; $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 25 \end{pmatrix}$

Setze die beiden Geradengleichungen gleich:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 25 \end{pmatrix} \quad \Big| - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} - t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 25 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \; +s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix} - t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} I. \quad 2s - 5t = 1 \\ II. \; -2s + 5t = 0 \quad | \cdot 5 \\ III. \; 10s - 25t = -7 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} I. \quad 2s - 5t = 1 \\ II. \; -10s + 25t = 0 \quad | \; II. + III. \Rightarrow IIa. \; 0 = -7 \\ III. \; 10s - 25t = -7 \end{array}$$

Diese Gleichung ist immer unwahr, also hat das LGS keine Lösung, also gibt es keinen Schnittpunkt zwischen den Geraden. Die Geraden sind also parallel oder windschief zueinander.

Betrachte die beiden Richtungvektoren: Wenn die beiden Geraden parallel zueinander sind, sind es auch die Richtungsvektoren. Zwei Richtungsvektoren sind parallel zueinander, wenn sie sich als Vielfache voneinander darstellen lassen. Das LGS

$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 25 \end{pmatrix}$ muss also lösbar sein.

$$\begin{array}{l} I. \; 2 = 5t \\ II. \; -2 = -5t \quad | \; II. + III. \Leftrightarrow I. \; t = \frac{2}{5} \\ III. \; 10 = 25t \end{array}$$

Setze $t = \frac{2}{5}$ in II. und III. ein:

$$\begin{array}{l} II. \; -2 = -5 \cdot \frac{2}{5} = -2 \\ III. \; 10 = 25 \cdot \frac{2}{5} = 10 \end{array}$$

Beide Gleichung sind wahr, also sind die beiden Richtungsvektoren parallel zueinander.

Die beiden Geraden liegen parallel zueinander.

Mathematik GK 13 m2, HÜ Nr. 1 – Schnitte Geraden/Ebenen – Lösung A 15.09.2016

<u>1.2</u> $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$; $E_2: x_1 + 4x_3 = 2$

Aus der Parametergleichung von Ebene 1:

$I. \quad x_1 = 4 + 4r$

$II. \quad x_2 = 2r + 2s$ Setze die Koordinaten in die Koordinatengleichung von Ebene 2 ein:

$III. \quad x_3 = -10 + 2s$

$$(4+4r) + 4(-10+2s) = 2 \;\Leftrightarrow\; 4 + 4r - 40 + 8s = 2 \;\Leftrightarrow\; 4r - 36 = 2 - 8s \;\Leftrightarrow\; 4r = 38 - 8s \;\Leftrightarrow\; r = 9{,}5 - 2s$$

Setze $r = 9{,}5 - 2s$ in die Parametergleichung von Ebene 1 ein:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} + (9{,}25 - 2s) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 38 \\ 19 \\ 0 \end{pmatrix} + (-2s) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 42 \\ 19 \\ -10 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -8+0 \\ -4+2 \\ 0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 \\ 19 \\ -10 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die Schnittgerade hat also die Geradengleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 42 \\ 19 \\ -10 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$