Mathematatik GK 13 m4, AB 03 – Wdh. Ebenengleichungen – Lösung 11.02.2016

Aufgabe 1: Wandle die Gleichungen der folgenden Geraden und Ebenen in die angegebene Form um.

1.1 $g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$ in die Koordinatenform.

$I.\quad x_1=2+6t \quad \mid \cdot 2$ $II.\quad x_2=3+4t \quad \mid \cdot 3$	$Ia.\quad 2x_1=4+12t$ $IIa.\quad 3x_2=9+12t \quad \mid II-I$ $\mathbf{-2x_1+3x_2=5}$

1.2 $E:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}6\\4\\-4\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$ in die Koordinatenform und anschließend in die Normalenform.

$I.\quad x_1=2+6r-s \quad \mid 2I+III$ $II.\quad x_2=3+4r \quad \mid \cdot 2$ $III.\quad x_3=-4r+2s$ $Ia.\quad 2x_1+x_3=4+8r \quad \mid Ia.-II.$ $II.\quad 2x_2=6+8r$	$\mathbf{2x_1-2x_2+x_3=-2}$ $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \left[\vec{x}-\begin{pmatrix}2\\6\\0\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}=0$

1.3 $E: 2x_1-2x_2+3x_3=5$ in die Parameterform und in die Hesse'sche Normalenform.

$2x_1-2x_2+3x_3=5$ $\Leftrightarrow\ x_1=2{,}5+x_2-1{,}5x_3$ $\quad x_2=0+x_2+0$ $\quad x_3=0+0+x_3$ $\Rightarrow \vec{x}=\begin{pmatrix}2{,}5\\0\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-1{,}5\\0\\1\end{pmatrix}$	$\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_0=\frac{1}{\sqrt{4+4+9}}\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$ $\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}2{,}5\\0\\0\end{pmatrix}\right]\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}=0$

1.4 Die Ebene E durch die Punkte $A(-2|3|4)$, $B(2|2|2)$ und $C(-1|3|2)$ in die Normalenform, Parameterform und Koordinatenform.

$\vec{AB}=\begin{pmatrix}4\\-1\\-2\end{pmatrix} \quad \vec{AC}=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ $\Rightarrow \vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\3\\4\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}4\\-1\\-2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ $I.\quad x_1=-2+4r+s$ $II.\quad x_2=3-r \quad \mid \cdot 6$ $III.\quad x_3=4-2r-2s \quad \mid III.+2I.$	$IIa.\quad 6x_2=18-6r \quad \mid IIa.+IIIa.$ $IIIa.\quad x_3+2x_1=6r$ $\mathbf{2x_1+6x_2+x_3=18}$ $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\6\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \left[\vec{x}-\begin{pmatrix}-2\\3\\4\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}2\\6\\1\end{pmatrix}=0$

Mathematik GK 13 m4, AB 03 – Wdh. Ebenengleichungen – Lösung 11.02.2016

Aufgabe 2: Die drei Punkte $A(2|5|6)$, $B(-3|15|2)$ und $C(5|-10|15)$ liegen auf einer Ebene E.

2.1 Bestimme eine Parametergleichung, welche die Ebene E beschreibt.

$$E:\vec{x}=\vec{a}+r\cdot\vec{AB}+s\cdot\vec{AC}$$

$$\vec{AB}=\vec{b}-\vec{a}=\begin{pmatrix}-3\\15\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\5\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\10\\-4\end{pmatrix} \qquad \vec{AC}=\vec{c}-\vec{a}=\begin{pmatrix}5\\-10\\15\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\5\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-15\\9\end{pmatrix}$$

Also $E:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\5\\6\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-5\\10\\-4\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}3\\-15\\9\end{pmatrix}$

2.2 Bestimme eine Koordinatengleichung, welche die Ebene E beschreibt.

Erstelle ein LGS aus der Parametergleichung $I.\quad x_1=2-5r+3s \quad \mid 3I-III$ $II.\quad x_2=5+10r-15s \quad \mid II+5I$ $III.\quad x_3=6-4r+9s$	$Ia.\quad 3x_1-x_3=-11r \quad \mid \cdot 15$ $IIa.\quad 5x_1+x_2=15-15r \quad \mid \cdot 11$ $Ib.\quad 45x_1-15x_3=-165r$ $IIb.\quad 55x_1+11x_2=165-165r \quad \mid IIb-Ib$ $10x_1+11x_2+15x_3=165$

2.3 Bestimme eine Normalengleichung, welche die Ebene E beschreibt.

Normalenvektor: $\vec{n}=\begin{pmatrix}10\\11\\15\end{pmatrix}$ Nehme Vektor $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\5\\6\end{pmatrix}$ als Stützvektor: Also $\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}2\\5\\6\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}10\\11\\15\end{pmatrix}=0$

2.4 Bestimme einen weiteren Punkt, der auf der Ebene E liegt.

$E:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\5\\6\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-5\\10\\-4\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}3\\-15\\9\end{pmatrix}$ Wähle z.B. $r=1$ und $s=1$

$\vec{f}=\begin{pmatrix}2\\5\\6\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}-5\\10\\-4\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}3\\-15\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\11\end{pmatrix}$ Also $F(0|0|11)$ liegt auch in der Ebene.

2.4 Überprüfe, ob der Punkt $D(-29|40|2)$ ebenfalls in der Ebene E liegt. Berechne den Abstand des Punktes D von der Ebene. (Falls der Punkt in der Ebene liegt, sollte hier 0 heraus kommen).

Setze in Koordinatenform ein:

$$10\cdot(-29)+11\cdot 40+15\cdot 2=165 \Leftrightarrow -319+440+30=165 \Leftrightarrow -245=165$$

Die Gleichung ist unwahr, also liegt der Punkt D nicht in der Ebene.

2.5 Bestimme den Parameter p so, dass der Punkt $F(0|p|1)$ in der Ebene E liegt.
Setze in Koordinatenform ein:

$$10\cdot 0+11\cdot p+15\cdot 1=165 \Leftrightarrow 11p+15=165 \Leftrightarrow 11p=150 \Leftrightarrow \boldsymbol{p=\frac{150}{11}}=13,\overline{63}$$

Mathematik GK 13 m4, AB 03 – Wdh. Ebenengleichungen – Lösung 11.02.2016

Aufgabe 3: Ein Sportflugzeug muss in der mexikanischen Hochebene notlanden (vermutlich ein Drogenkurier). Es befindet sich irgendwo bei den Orten Villa Hachís (Koordinaten: $(100|20|50)$), Villa Bareta $(120|15|52)$ und Villa Farlopa $(140|10|50)$. Das Flugzeug bewegt sich geradlinig und wurde zuletzt an den Koordinaten $(208|81|96)$ und $(160|45|72)$ gesehen.

Berechne die Koordinaten, wo das Flugzeug auf der Ebene notlandet.

Die Hochebene kann sich als mathematische Ebene E beschreiben lassen, in welcher die Punkte $H(100|20|50)$, $B(120|15|52)$ und $F(140|10|50)$ liegen.

Die Bahn des Flugzeuges kann sich als Gerade g beschreiben lassen, auf welcher die Punkte $K_1(208|81|96)$ und $K_2(160|45|72)$ liegen.

Stelle Parametergleichungen auf:

$$E: \vec{x} = \vec{h} + r \cdot \vec{HB} + s \cdot \vec{HF}$$

$$\vec{HB} = \vec{b} - \vec{h} = \begin{pmatrix} 120 \\ 15 \\ 52 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 100 \\ 20 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{HF} = \vec{f} - \vec{h} = \begin{pmatrix} 140 \\ 10 \\ 50 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 100 \\ 20 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Also $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ 20 \\ 50 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}$

$g: \vec{x} = \vec{k}_1 + t \cdot \vec{K_1 K_2}$ $\quad \vec{K_1 K_2} = \vec{k}_2 - \vec{k}_1 = \begin{pmatrix} 160 \\ 45 \\ 72 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 208 \\ 81 \\ 96 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -48 \\ -36 \\ -24 \end{pmatrix}$ Für schönere Zahlen wählen wir als Richtungsvektor $\vec{k} = \frac{1}{24} \cdot \vec{K_1 K_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1{,}5 \\ -1 \end{pmatrix}$ Also ist $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 208 \\ 81 \\ 96 \end{pmatrix} - t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Gesucht ist der Schnittpunkt. Gleichsetzen:

$$\begin{pmatrix} 100 \\ 20 \\ 50 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 208 \\ 81 \\ 96 \end{pmatrix} - t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Big| \quad - \begin{pmatrix} 100 \\ 20 \\ 50 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow \; r \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 108 \\ 61 \\ 46 \end{pmatrix}$ Als LGS:

$$\begin{aligned} &I. \quad 20r + 40s + 2t = 108 \quad | \quad I + 4II \\ &II. \; -5r - 10s + 1{,}5t = 61 \\ &III. \; 2r \qquad\quad + t = 46 \end{aligned}$$

$Ia.\; 8t = 352 \;|\; :8 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{t = 44}$

Eigentlich genügt das schon, falls wir uns nicht verrechnet haben. Mathematisch gesehen müssen wir noch prüfen, ob auch reguläre Werte für *r* und *s* herauskommen, um auszuschließen, dass die Gerade parallel zur Ebene verläuft.

Setze $t=44$ in III. ein: $III.\ 2r \quad +44=46 \Leftrightarrow 2r=46-44 \Leftrightarrow \mathbf{r=1}$

Setze $t=44$ und $r=1$ in II. ein: $II.\ -5\cdot 1-10s+1{,}5\cdot 44=61 \quad | \quad +5-66$
$\Leftrightarrow -10s=0 \Leftrightarrow \mathbf{s=0}$

Schnittpunkt: Setze $t=44$ in g ein: (oder auch $r=1$ und $s=0$ in E)

$$g:\vec{x}_s=\begin{pmatrix}208\\81\\96\end{pmatrix}-44\cdot\begin{pmatrix}2\\1{,}5\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}120\\15\\52\end{pmatrix}$$

A: Das Flugzeug landet in Villa Bareta.