Mathematatik GK 13 m4, AB 01 – Übungsaufgaben Stochastik – Lösung 30.11.2015

Aufgabe 1: In einer Urne befinden sich 14 grüne, 8 blaue, 7 rote und eine schwarze Kugel. Die Kugel sind durchnummeriert, also Grün von 1-14, Blau von 1-8, Rot von 1-7 und auf der schwarzen Kugel steht eine 1.

1.1 Ziehen einer Kugel. Berechne die Wahrscheinlichkeit,

1.1.1 eine blaue Kugel zu ziehen. $\boldsymbol{p}=\frac{8}{14+8+7+1}=\frac{8}{30}=\frac{4}{15}=0{,}267=\mathbf{26{,}7\,\%}$	**1.1.2** eine blaue oder rote Kugel zu ziehen. $\boldsymbol{p}=\frac{8+7}{14+8+7+1}=\frac{15}{30}=\frac{1}{2}=0{,}5=\mathbf{50\,\%}$
1.1.3 keine rote Kugel zu ziehen. $\boldsymbol{p}=1-\frac{7}{14+8+7+1}=\frac{23}{30}=\frac{4}{15}=0{,}767=\mathbf{76{,}7\,\%}$	**1.1.4** keine blaue oder rote Kugel zu ziehen. $\boldsymbol{p}=1-\frac{7+8}{14+8+7+1}=\frac{15}{30}=\frac{1}{2}=0{,}5=\mathbf{50\,\%}$
1.1.5 eine Kugel mit der Zahl 5 zu ziehen. *Eine solche Kugel gibt es in den Farben grün, blau und rot, also drei Kugeln insgesamt.* $\boldsymbol{p}=\frac{3}{30}=\frac{1}{10}=0{,}1=\mathbf{10\,\%}$	**1.1.6** eine Kugel mit der Zahl 1 oder 2 zu ziehen. *Vier Kugel mit „1“ und drei Kugel mit „2“ (weil es keine schwarze 2 gibt). Also* $\boldsymbol{p}=\frac{4+3}{30}=\frac{7}{30}=0{,}2333=\mathbf{23{,}33\,\%}$
1.1.7 eine grüne Kugel mit einer geraden Zahl zu ziehen. *grün: 7 gerade Zahlen* $\boldsymbol{p}=\frac{7}{30}=0{,}2333=\mathbf{23{,}33\,\%}$	**1.1.8** eine Kugel mit einer Zahl >6 und <9 zu ziehen, die nicht grün ist. *Das passt auf 2 blaue und 1 rote Kugel.* $\boldsymbol{p}=\frac{2+1}{30}=\frac{3}{30}=\frac{1}{10}=0{,}1=\mathbf{10\,\%}$

1.2 Ziehen von zwei Kugeln mit Zurücklegen. Berechne die Wahrscheinlichkeit,

1.2.1 nur blaue Kugeln zu ziehen. *Einmal ziehen:* $P(blau)=\frac{8}{30}=\frac{4}{15}$ $\boldsymbol{p}=\left(\frac{4}{15}\right)^2=\frac{16}{225}=0{,}0711=\mathbf{7{,}1\,\%}$	**1.2.2** keine schwarze Kugel zu ziehen. *Hinweis: Überstreichung bedeutet „nicht“, also $\overline{schwarz}$ = „nicht schwarz“* *Einmal:* $P(schwarz)=\frac{1}{30}$ $P(\overline{schwarz})=1-\frac{1}{30}=\frac{29}{30}$ $\boldsymbol{p}=\left(\frac{29}{30}\right)^2=\frac{841}{900}=0{,}934=\mathbf{93{,}4\,\%}$

1.2.3 mindestens eine blaue Kugel zu ziehen. *Gegenereignis: Keine blaue Kugel ziehen* $\boldsymbol{p}=1-\left(\frac{22}{30}\right)^2=1-\frac{121}{225}=\frac{104}{225}=0{,}4622=\mathbf{46{,}22\,\%}$	**1.2.4** höchstens eine blaue Kugel zu ziehen. *Günstige Pfade: Keine blaue Kugel ziehen + Genau eine blaue Kugel ziehen.* *Keine blaue:* $P(\overline{B}\overline{B})=\left(\frac{22}{30}\right)^2=\frac{121}{225}$ *Genau eine blaue:* *$B\overline{B}$:* $P(B\overline{B})=\frac{8}{30}\cdot\frac{22}{30}=\frac{44}{225}$ *oder $\overline{B}B$:* $P(\overline{B}B)=\frac{22}{30}\cdot\frac{8}{30}=\frac{44}{225}$ $p=P(\overline{B}\overline{B})+P(B\overline{B})+P(\overline{B}B)$ $=\frac{121}{225}+2\cdot\frac{44}{225}=\frac{209}{225}=0{,}9289=\mathbf{92{,}89\,\%}$
1.2.5 nur Kugeln mit der Zahl 1 zu ziehen. *Vier Kugel mit der Zahl 1:* $P(eins)=\frac{4}{30}=\frac{2}{15}$ $\boldsymbol{p}=\left(\frac{2}{15}\right)^2=\frac{4}{225}=0{,}0178=\mathbf{1{,}78\,\%}$	**1.2.6** nur Kugeln mit der Zahl 8 zu ziehen. *Gibt es nur in grün und blau:* $P(acht)=\frac{2}{30}=\frac{1}{15}$ $\boldsymbol{p}=\left(\frac{1}{15}\right)^2=\frac{1}{225}=0{,}0044=\mathbf{0{,}44\,\%}$
1.2.7 dass die Summe der Zahlen auf den Kugeln genau 3 ergibt. *Günstige Pfade: 2+1 und 1+2* $P(eins)=\frac{4}{30}=\frac{2}{15}$ $\quad P(zwei)=\frac{3}{30}=\frac{1}{10}$ $P(2+1)=\frac{2}{15}\cdot\frac{1}{10}=\frac{2}{150}=\frac{1}{75}$ $P(1+2)=\frac{1}{10}\cdot\frac{2}{15}=\frac{2}{150}=\frac{1}{75}$ $\boldsymbol{p}=P(2+1)+P(1+2)=\frac{2}{75}=0{,}0267=\mathbf{2{,}67\,\%}$	**1.2.8** dass die Summe der Zahlen auf den Kugeln ungerade ist. $P(gerade)=\frac{7+4+3}{30}=\frac{14}{30}=\frac{7}{15}$ $P(ungerade)=1-P(gerade)=\frac{8}{15}$ *Günstige Pfade: gerade+ungerade und ungerade+gerade* $P(g+u)=\frac{7}{15}\cdot\frac{8}{15}=\frac{56}{225}$ $P(u+g)=\frac{8}{15}\cdot\frac{7}{15}=\frac{56}{225}$ $\boldsymbol{p}=P(g+u)+P(u+g)=\frac{112}{225}=0{,}4978=\mathbf{49{,}78\,\%}$

Mathematik GK 13 m4, AB 01 – Übungsaufgaben Stochastik – Lösung 30.11.2015

<u>**1.3**</u> Berechne Aufgabe 1.2 für das <u>Ziehen von zwei Kugeln ohne Zurücklegen</u>.

<u>**1.3.1**</u> nur blaue Kugeln zu ziehen. *Entlang des Pfades blau+blau fehlt beim zweiten Mal ziehen nun eine blaue Kugel.* $\boldsymbol{p}=\frac{8}{30}\cdot\frac{7}{29}=\frac{28}{435}=\frac{4}{75}=0{,}0533=\mathbf{5{,}33\,\%}$	<u>**1.3.2**</u> keine schwarze Kugel zu ziehen. *Gegenereignis* $\overline{\textit{schwarz}}+\overline{\textit{schwarz}}$ $\boldsymbol{p}=1-\frac{29}{30}\cdot\frac{28}{29}=1-\frac{28}{30}=\frac{2}{30}=\frac{1}{15}=0{,}667=\mathbf{6{,}67\,\%}$
<u>**1.3.3**</u> mindestens eine blaue Kugel zu ziehen. *Gegenereignis: Keine blaue Kugel ziehen* $\boldsymbol{p}=1-\frac{22}{30}\cdot\frac{21}{29}=1-\frac{462}{870}=\frac{68}{145}=0{,}4690=\mathbf{46{,}90\,\%}$	<u>**1.3.4**</u> höchstens eine blaue Kugel zu ziehen. *Günstige Pfade: Keine blaue Kugel ziehen + Genau eine blaue Kugel ziehen.* *Keine blaue:* $P(\overline{BB})=\frac{22}{30}\cdot\frac{21}{29}=\frac{77}{145}$ *Genau eine blaue:* $P(B\overline{B})=\frac{8}{30}\cdot\frac{22}{29}=\frac{88}{435}$ *oder* $P(\overline{B}B)=\frac{22}{30}\cdot\frac{8}{29}=\frac{88}{435}$ $p=P(\overline{BB})+P(B\overline{B})+P(\overline{B}B)$ $=\frac{77}{145}+2\cdot\frac{88}{435}=\frac{407}{435}=0{,}9356=\mathbf{93{,}56\,\%}$
<u>**1.3.5**</u> nur Kugeln mit der Zahl 1 zu ziehen. *Vier Kugel mit der Zahl 1:* $p=\frac{4}{30}=\frac{2}{15}$ $\boldsymbol{p}=\frac{4}{30}\cdot\frac{3}{29}=\frac{12}{870}=\frac{2}{145}=0{,}0137=\mathbf{1{,}37\,\%}$	<u>**1.3.6**</u> nur Kugeln mit der Zahl 8 zu ziehen. *Gibt es nur in grün und blau:* $\boldsymbol{p}=\frac{2}{30}\cdot\frac{1}{29}=\frac{2}{870}=\frac{1}{435}=0{,}0030=\mathbf{0{,}30\,\%}$
<u>**1.3.7**</u> dass die Summe der Zahlen auf den Kugeln genau 3 ergibt. *Günstige Pfade: 2+1 und 1+2* $P(2+1)=\frac{4}{30}\cdot\frac{3}{29}=\frac{12}{870}=\frac{2}{145}$ $P(1+2)=\frac{3}{30}\cdot\frac{4}{29}=\frac{12}{870}=\frac{2}{145}$ $\boldsymbol{p}=P(2+1)+P(1+2)=\frac{4}{145}=0{,}0276=\mathbf{2{,}76\,\%}$	<u>**1.3.8**</u> dass die Summe der Zahlen auf den Kugeln ungerade ist. *14 gerade, 16 ungerade Kugeln.* *Günstige Pfade: gerade+ungerade und ungerade+gerade* $P(g+u)=\frac{14}{30}\cdot\frac{16}{29}=\frac{224}{870}=\frac{112}{435}$ $P(u+g)=\frac{16}{30}\cdot\frac{14}{29}=\frac{112}{435}$ $\boldsymbol{p}=P(g+u)+P(u+g)=\frac{224}{435}=0{,}5149=\mathbf{51{,}49\,\%}$

Mathematik GK 13 m4, AB 01 – Übungsaufgaben Stochastik – Lösung 30.11.2015

1.4 Ziehen von drei Kugeln mit Zurücklegen. Berechne die Wahrscheinlichkeit,

1.4.1 nur schwarze Kugeln zu ziehen.

$$P(schwarz)=\frac{1}{30}$$

$$\boldsymbol{p}=\left(\frac{1}{30}\right)^3=\frac{1}{27000}=0{,}0000370=\mathbf{0{,}0037\,\%}$$

1.4.2 genau eine schwarze, eine rote und eine blaue Kugel zu ziehen.

Einer der günstigen Pfade:

$$P(SRB)=\frac{1}{30}\cdot\frac{7}{30}\cdot\frac{8}{30}=\frac{56}{27000}$$

Weitere günstige Pfade sind alle Kombinationen von SRB, also BRS, RSB usw.. Es gibt 3! = 6 Kombinationen, also 6 günstige Pfade, die alle die gleiche Wahrscheinlichkeit haben.

Also $\boldsymbol{p}=6\cdot P(SRB)=6\cdot\frac{56}{27000}$

$$=\frac{336}{27000}=\frac{14}{1125}=0{,}0124=\mathbf{1{,}25\,\%}$$

1.4.3 mindestens zwei rote Kugeln zu ziehen.

Günstige Pfade: rot-rot-rot oder zweimal rot, einmal nicht-rot

$$P(RRR)=\frac{7}{30}\cdot\frac{7}{30}\cdot\frac{7}{30}=\frac{343}{27000}$$

$$P(RR\overline{R})=\frac{7}{30}\cdot\frac{7}{30}\cdot\frac{23}{30}=\frac{1127}{27000}$$

Nicht-rot kann auch an Stelle 1 oder 2 sein.

$$P(\overline{R}RR)=\frac{23}{30}\cdot\frac{7}{30}\cdot\frac{7}{30}=\frac{1127}{24360}$$

$$P(R\overline{R}R)=\frac{7}{30}\cdot\frac{23}{30}\cdot\frac{7}{30}=\frac{1127}{24360}$$

$$\boldsymbol{p}=P(RRR)+P(\overline{R}RR)+P(R\overline{R}R)+P(RR\overline{R})$$

$$=\frac{343}{27000}+3\cdot\frac{1127}{27000}=\frac{3724}{27000}=\frac{931}{6750}$$

$$=0{,}1379=\mathbf{13{,}79\,\%}$$

1.4.4 genau 2 grüne und eine rote Kugel zu ziehen.

Günstige Pfade: zweimal grün, einmal rot. Grün kann als erstes, als zweites oder als drittes gezogen werden.

$$P(RGG)=\frac{7}{30}\cdot\frac{8}{30}\cdot\frac{8}{30}=\frac{448}{27000}=\frac{56}{3375}$$

Wahrscheinlichkeiten der Pfade sind alle gleich

$$P(GRG)=P(GGR)=P(RGG)$$

$$\boldsymbol{p}=P(RGG)+P(GRG)+P(GGR)$$

$$=3\cdot\frac{56}{3375}=\frac{56}{1125}=0{,}04978=\mathbf{4{,}98\,\%}$$

1.4.5 keine Kugel mit der Zahl 8 zu ziehen.

8 gibt es nur in grün und blau:

$$P(acht)=\frac{2}{30}=\frac{1}{15}$$

nicht-8 ist also $P(\overline{acht})=1-P(acht)=\frac{14}{15}$

$$\boldsymbol{p}=\left(\frac{14}{15}\right)^3=\frac{2744}{3375}=0{,}8130=\mathbf{21{,}30\,\%}$$

1.4.6 keine blauen Kugeln mit einer ungeraden Zahl zu ziehen.

Bei 8 blauen Kugel sind 4 ungerade, also

$$P(blau+ungerade)=\frac{4}{30}=\frac{2}{15}$$

$$P(\overline{blau+ungerade})=1-\frac{2}{15}=\frac{13}{15}$$

$$\boldsymbol{p}=\left(\frac{13}{15}\right)^3=\frac{2197}{3375}=0{,}6510=\mathbf{65{,}10\,\%}$$

<u>1.4.7</u> nur blaue oder grüne Kugeln mit einer Quadratzahl zu ziehen. *Passende Kugeln: B1;B4;G1;G4,G9 also 5 Kugeln* $P(B\,oder\,G+Quadratzahl)=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$ $\boldsymbol{p}=\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{216}=0{,}00463=\mathbf{0{,}46\,\%}$	**<u>1.4.8</u>** keine schwarze Kugel zu ziehen und keine der Kugeln die Zahl 3 hat. „Verbotene“ Kugeln: S1; G3; B3; R3, *also 4 Kugeln* $P(S\,oder\,3)=\frac{4}{30}=\frac{2}{15}$ $P(\overline{S\,oder\,3})=1-\frac{2}{15}=\frac{13}{15}$ $\boldsymbol{p}=\left(\frac{13}{15}\right)^3=\frac{2197}{3375}=0{,}6510=\mathbf{65{,}10\,\%}$

<u>1.5</u> Berechne Aufgabe 1.4 für das <u>Ziehen von drei Kugeln ohne Zurücklegen.</u>

<u>1.5.1</u> nur schwarze Kugeln zu ziehen. *Günstiger Pfad: SSS* $\boldsymbol{p}=P(SSS)=\frac{1}{30}\cdot\frac{0}{29}\cdot\frac{0}{29}=0=\mathbf{0\,\%}$	**<u>1.5.2</u>** genau eine schwarze, eine rote und eine blaue Kugel zu ziehen. *Einer der günstigen Pfade:* $P(SRB)=\frac{1}{30}\cdot\frac{7}{29}\cdot\frac{8}{28}=\frac{56}{24360}=\frac{1}{435}$ *Weitere günstige Pfade sind alle Kombinationen von SRB, also BRS, RSB usw.. Es gibt 3! = 6 Kombinationen, also 6 günstige Pfade, die alle die gleiche Wahrscheinlichkeit haben, denn z.B.* $P(BRS)=\frac{8}{30}\cdot\frac{7}{29}\cdot\frac{1}{28}=\frac{56}{24360}=\frac{1}{435}$ *Im Produkt bleiben die Nenner immer gleich, nur die Zähler wechseln die Position.* *Also* $\boldsymbol{p}=6\cdot P(SRB)=6\cdot\frac{1}{435}=\frac{6}{435}=\frac{2}{145}=0{,}01379$ $=\mathbf{1{,}38\,\%}$

<u>**1.5.3**</u> mindestens zwei rote Kugeln zu ziehen. *Günstige Pfade: rot-rot-rot oder zweimal rot, einmal nicht-rot* $P(RRR)=\frac{7}{30}\cdot\frac{6}{29}\cdot\frac{5}{28}=\frac{210}{24360}=\frac{1}{116}$ $P(RR\overline{R})=\frac{7}{30}\cdot\frac{6}{29}\cdot\frac{23}{28}=\frac{996}{24360}=\frac{8}{203}$ *Nicht-rot kann auch an Stelle 1 oder 2 sein.* $P(\overline{R}RR)=\frac{23}{30}\cdot\frac{7}{29}\cdot\frac{6}{28}=\frac{996}{24360}=\frac{8}{203}$ $P(R\overline{R}R)=\frac{7}{30}\cdot\frac{23}{29}\cdot\frac{6}{28}=\frac{996}{24360}=\frac{8}{203}$ $\boldsymbol{p}=P(RRR)+P(\overline{R}RR)+P(R\overline{R}R)+P(RR\overline{R})$ $=\frac{1}{116}+3\cdot\frac{8}{203}=\frac{103}{812}=0{,}1268=\mathbf{12{,}68\,\%}$	<u>**1.5.4**</u> genau 2 grüne und eine rote Kugel zu ziehen. *Günstige Pfade: zweimal grün, einmal rot. Grün kann als erstes, als zweites oder als drittes gezogen werden.* $P(RGG)=\frac{7}{30}\cdot\frac{8}{29}\cdot\frac{7}{28}=\frac{392}{24360}=\frac{7}{435}$ $P(GRG)=\frac{8}{30}\cdot\frac{7}{29}\cdot\frac{7}{28}=\frac{392}{24360}=\frac{7}{435}$ $P(GGR)=\frac{8}{30}\cdot\frac{7}{29}\cdot\frac{7}{28}=\frac{392}{24360}=\frac{7}{435}$ $\boldsymbol{p}=P(RGG)+P(GRG)+P(GGR)$ $=3\cdot\frac{7}{435}=\frac{21}{435}=\frac{7}{145}=0{,}0483=\mathbf{4{,}83\,\%}$
<u>**1.5.5**</u> keine Kugel mit der Zahl 8 zu ziehen. *8 gibt es nur in grün und blau:* *Dreimal nicht-8 ziehen:* $P(\overline{acht+acht+acht})=\frac{28}{30}\cdot\frac{27}{29}\cdot\frac{26}{28}=\frac{117}{145}$ $=0{,}8069=\mathbf{80{,}69\,\%}$	<u>**1.5.6**</u> keine blauen Kugeln mit einer ungeraden Zahl zu ziehen. *Bei 8 blauen Kugel sind 4 ungerade, also sind 4 Kugeln ungünstig und 26 Kugeln günstig.* $\boldsymbol{p}=\frac{26}{30}\cdot\frac{25}{29}\cdot\frac{24}{28}=\frac{15300}{24360}=\frac{130}{203}=0{,}6404=\mathbf{64{,}04\,\%}$
<u>**1.5.7**</u> nur blaue oder grüne Kugeln mit einer Quadratzahl zu ziehen. *Passende Kugeln: B1;B4;G1;G4,G9 also 5 Kugeln* $\boldsymbol{p}=\frac{5}{30}\cdot\frac{4}{29}\cdot\frac{3}{28}=\frac{60}{24360}=\frac{1}{406}$ $=0{,}002463=\mathbf{0{,}27\,\%}$	<u>**1.5.8**</u> keine schwarze Kugel zu ziehen und keine der Kugeln die Zahl 3 hat. *Ungünstige Kugeln: S1; G3; B3; R3, also 4 Kugeln, also 26 günstige Kugeln* $\boldsymbol{p}=\frac{26}{30}\cdot\frac{25}{29}\cdot\frac{24}{28}=\frac{15300}{24360}=\frac{130}{203}=0{,}6404=\mathbf{64{,}04\,\%}$