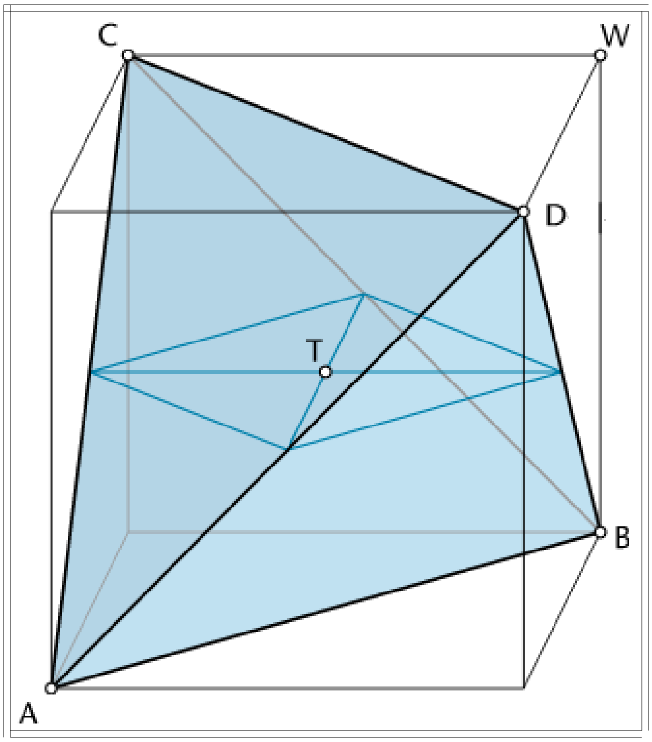
Mathematik GK 12 m2, AB 05 – Tetraeder – Lösung 26.04.2016

Aufgabe 1: Ein regelmäßiges Tetraeder ist einer der fünf platonischen Körper, d.h. ein Körper, der durch regelmäßige Vielecke begrenzt wird. Beim Tetraeder sind alle Flächen gleichseitige Dreiecke.
Anders ausgedrückt: Ein Tetraeder ist eine regelmäßige Pyramide mit einem gleichseitigen Dreieck als Grundfläche und die Mantelfläche besteht ebenfalls aus gleichseitigen Dreiecken.
Rechts ist ein Tetraeder abgebildet, dessen Ecken die Punkte

$A(12|0|0)$,
$B(0|12|0)$,
$C(0|0|12)$ und
$D(12|12|12)$ sind.



1.1 Gib die Koordinaten des Punktes W an.

$\boldsymbol{W(0|12|12)}$

1.2 Berechne das Volumen des umhüllenden Würfels.
Alle Kanten sind gleich lang, also genügt die

Länge einer Kante: $\overline{CW}=|\vec{w}-\vec{c}|=\left|\begin{pmatrix}0-0\\12-0\\12-12\end{pmatrix}\right|=\sqrt{12^2+0^2+0^2}=12$

$V=\overline{CW}^3=(12\,L.E.)^3=\mathbf{1728}\,V.E.$

1.3 Der Mittelpunkt von Tetraeder und Würfel ist der Punkt $T(6|6|6)$. Zeige, dass der Winkel zwischen den beiden Strecken $\overline{TC}$ und $\overline{TA}$ den Wert $109{,}47°$ hat.

Bemerkung: Dieser Winkel heißt Tetraederwinkel und hat eine besondere Bedeutung in der Chemie. Der Winkel ist immer gleich, egal welche Ecken des Tetraeders man wählt.

$$\vec{TC}=\vec{c}-\vec{t}=\begin{pmatrix}0-6\\0-6\\12-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\-6\\6\end{pmatrix}\qquad |\vec{TC}|=\sqrt{(-6)^2+(-6)^2+6^2}=\sqrt{3\cdot 6^2}=6\cdot\sqrt{3}$$

$$\vec{TA}=\vec{a}-\vec{t}=\begin{pmatrix}12-6\\0-6\\0-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-6\\-6\end{pmatrix}\qquad |\vec{TA}|=\sqrt{6^2+(-6)^2+(-6)^2}=\sqrt{3\cdot 6^2}=6\cdot\sqrt{3}$$

$$\vec{TA}\cdot\vec{TC}=(-6)\cdot 6+(-6)\cdot(-6)+6\cdot(-6)=-36+36-36=-36$$

$$\cos(\phi)=\frac{\vec{TA}\cdot\vec{TC}}{|\vec{TC}|\cdot|\vec{TC}|}=\frac{-36}{6\cdot\sqrt{3}\cdot 6\cdot\sqrt{3}}=\frac{-36}{36\cdot 3}=-\frac{1}{3}\qquad\Rightarrow\phi=\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\approx\mathbf{109{,}4712}°$$

1.4 Berechne das Volumen des Tetraeders. Zur Erinnerung: $V_{Pyramide}=\frac{1}{3}G\cdot h$

Auch hier gibt es mehrere Lösungsmöglichkeiten. Am schnellsten:

$$V_{Tetraeder}=V_{Würfel}-4\cdot V_{Restpyramide}=V_{Würfel}-4\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}12\cdot 12\right)\cdot 12=V_{Würfel}-\frac{2}{3}V_{Würfel}=\frac{1}{3}V_{Würfel}=\mathbf{576}\,V.E.$$