Mathematik LK 12 M1, Stochastik Skataufgabe – Lösung **22.06.2015**

<u>Aufgabe:</u> Drei Spieler ziehen je zwei Karten aus dem gleichen Skatblatt (ohne Zurücklegen). Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Spieler zwei Asse hat.

Lösung mit Pfadregel: Betrachte den Wahrscheinlichkeitsbaum A (Ass) und $\overline{A}$ Nicht-Ass mit der Länge 6. Gesucht sind alle Pfade, die in Ebene 1/2, 3/4 oder 5/6 jeweils ein Ass haben.

Wie viele günstige Pfade gibt es? Unterscheide drei Fälle:

Spieler 1 hat zwei Asse:	Günstige Pfade sind AA ?? ??. Für die ? gibt es nun drei Möglichkeiten: (0) Die anderen Spieler haben keine Asse: Anzahl Pfade: 1 (1) Die anderen Spieler haben ein Ass: Anzahl Pfade: 4 (2) Die anderen Spieler haben zwei Asse: Anzahl Pfade insgesamt: $\binom{4}{2}$ Allerdings werden wir die Fälle "Spieler 2 oder Spieler 3 haben auch zwei Asse" später berücksichtigen, bleiben also $\binom{4}{2}-2$ Pfade.
Spieler 2 hat zwei Asse:	Günstige Pfade sind ?? AA ??. Für die ? gibt es nun drei Möglichkeiten: (0) Die anderen Spieler haben keine Asse: Anzahl Pfade: 1 (1) Die anderen Spieler haben ein Ass: Anzahl Pfade: 4 (2) Die anderen Spieler haben zwei Asse: Anzahl Pfade insgesamt: $\binom{4}{2}$ Allerdings werden wir den Fall "Spieler 3 hat auch zwei Asse" später berücksichtigen, bleiben also $\binom{4}{2}-1$ Pfade.
Spieler 3 hat zwei Asse:	Günstige Pfade sind ?? ?? AA. Für die ? gibt es nun drei Möglichkeiten: (0) Die anderen Spieler haben keine Asse: Anzahl Pfade: 1 (1) Die anderen Spieler haben ein Ass: Anzahl Pfade: 4 (2) Die anderen Spieler haben zwei Asse: Anzahl Pfade insgesamt: $\binom{4}{2}$ Jetzt zählen alle Pfade.

Betrachte die Pfade für "Spieler 1 hat zwei Asse":

$$
\begin{aligned}
p_1 &= \underbrace{\frac{4\cdot 3}{32\cdot 31}\cdot\frac{28\cdot 27\cdot 26\cdot 25}{30\cdot 29\cdot 28\cdot 27}}_{Fall(0)}\cdot\underbrace{1}_{1\,Pfad} + \underbrace{\frac{4\cdot 3}{32\cdot 31}\cdot\frac{2\cdot 28\cdot 27\cdot 26}{30\cdot 29\cdot 28\cdot 27}}_{Fall(1)}\cdot\underbrace{4}_{4\,Pfade} + \underbrace{\frac{4\cdot 3}{32\cdot 31}\cdot\frac{2\cdot 1\cdot 26\cdot 25}{30\cdot 29\cdot 28\cdot 27}}_{Fall(2)}\cdot\underbrace{4}_{6-2\,Pfade} \\
&= \frac{4\cdot 3}{32\cdot 31\cdot 30\cdot 29\cdot 28\cdot 27}\cdot\left(28\cdot 27\cdot 26\cdot 25 + 2\cdot 28\cdot 27\cdot 26\cdot 4 + 2\cdot 1\cdot 28\cdot 27\cdot 4\right) \\
&= \frac{4!\cdot 26!}{2!\cdot 32!}\cdot\left(\frac{28!}{24!} + 2\cdot\frac{28!}{25!}\cdot 4 + 2\cdot\frac{28!}{26!}\cdot 4\right) = \frac{4!\cdot 26!\cdot 28!}{2!\cdot 32!}\cdot\left(\frac{1}{24!} + \frac{2}{25!}\cdot 4 + \frac{2}{26!}\cdot 4\right) \\
&= \frac{4!\cdot 26!\cdot 28!}{2!\cdot 32!\cdot 24!}\cdot\left(1 + \frac{8}{25} + \frac{2}{26\cdot 25}\cdot 4\right)
\end{aligned}
$$

Betrachte die Pfade für "Spieler 2 hat zwei Asse":

$$
p_2 = \underbrace{\frac{28\cdot 27}{32\cdot 31}\cdot\frac{4\cdot 3\cdot 26\cdot 25}{30\cdot 29\cdot 28\cdot 27}}_{Fall(0)}\cdot\underbrace{1}_{1\,Pfad} + \underbrace{\frac{28\cdot 27}{32\cdot 31}\cdot\frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 26}{30\cdot 29\cdot 28\cdot 27}}_{Fall(1)}\cdot\underbrace{4}_{4\,Pfade} + \underbrace{\frac{28\cdot 27}{32\cdot 31}\cdot\frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{30\cdot 29\cdot 28\cdot 27}}_{Fall(2)}\cdot\underbrace{5}_{6-1\,Pfade}
$$

Abgesehen von der Anzahl der Pfade im letzten Summenterm ist das der gleiche Term wie bei p_1.

Also: $p_2=\frac{4!\cdot 26!\cdot 28!}{2!\cdot 32!\cdot 24!}\cdot\left(1+\frac{8}{25}+\frac{2}{26\cdot 25}\cdot 5\right)$

Betrachte die Pfade für "Spieler 3 hat zwei Asse":

$$p_3=\underbrace{\frac{28\cdot 27}{32\cdot 31}\cdot\frac{26\cdot 25\cdot 4\cdot 3}{30\cdot 29\cdot 28\cdot 27}}_{Fall(0)}\cdot\underbrace{1}_{1\,Pfad}+\underbrace{\frac{28\cdot 27}{32\cdot 31}\cdot\frac{26\cdot 2\cdot 4\cdot 3}{30\cdot 29\cdot 28\cdot 27}}_{Fall(1)}\cdot\underbrace{4}_{4\,Pfade}+\underbrace{\frac{28\cdot 27}{32\cdot 31}\cdot\frac{2\cdot 1\cdot 4\cdot 3}{30\cdot 29\cdot 28\cdot 27}}_{Fall(2)}\cdot\underbrace{6}_{6-0\,Pfade}$$

Das ist wieder der gleiche Term, abgesehen von der Pfadanzahl, also

$$p_3=\frac{4!\cdot 26!\cdot 28!}{2!\cdot 32!\cdot 24!}\cdot\left(1+\frac{8}{25}+\frac{2}{26\cdot 25}\cdot 6\right)$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist:

$$p=p_1+p_2+p_3=\frac{4!\cdot 26!\cdot 28!}{2!\cdot 32!\cdot 24!}\cdot\left(1+\frac{8}{25}+\frac{2}{26\cdot 25}\cdot 4\right)+\frac{4!\cdot 26!\cdot 28!}{2!\cdot 32!\cdot 24!}\cdot\left(1+\frac{8}{25}+\frac{2}{26\cdot 25}\cdot 5\right)$$
$$+\frac{4!\cdot 26!\cdot 28!}{2!\cdot 32!\cdot 24!}\cdot\left(1+\frac{8}{25}+\frac{2}{26\cdot 25}\cdot 6\right)$$
$$\boldsymbol{p}=\frac{4!\cdot 26!\cdot 28!}{2!\cdot 32!\cdot 24!}\cdot\left(3\cdot 1+\frac{3\cdot 8}{25}+\frac{2}{26\cdot 25}\cdot(4+5+6)\right)=\frac{4!\cdot 26!\cdot 28!}{2!\cdot 32!\cdot 24!}\cdot\left(3+\frac{24}{25}+\frac{30}{26\cdot 25}\right)=\mathbf{3{,}62\,\%}$$