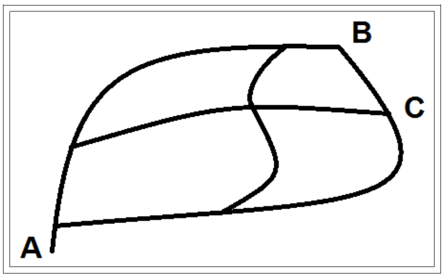
Mathematik LK M1, 4. Kursarbeit – Stochastik I - Lösung 12.06.2015

Aufgabe 1: Wahrscheinlichkeitsrechnung



Löse die Aufgabe auf diesem Aufgabenblatt. Trage die Lösung in die Tabelle ein. Ein Rechenweg ist hier nicht erforderlich.

Hinweis: Das „Casinospiel“ besteht aus dem gleichzeitigen Würfeln von drei normalen Sechserwürfeln.

Nr.	Aufgabe	Lösung
1.1	Das Bild oben zeigt ein Straßennetz. Man wählt einen zufälligen Weg von A nach B, wobei jeder Streckenabschnitt nur einmal durchlaufen wird. Berechne die Wahrscheinlichkeit, an C vorbei zu kommen.	$\frac{12}{16}=\frac{3}{4}=75\%$
1.2	Berechne die Wahrscheinlichkeit, beim Casinospiel eine Straße zu würfeln.	$\frac{1}{9}=11{,}1\%$
1.3	Berechne die Wahrscheinlichkeit, beim Casinospiel keinen Dreierpasch zu würfeln.	$\frac{35}{36}=97{,}2\%$
1.4	Berechne die Wahrscheinlichkeit, beim Casinospiel nur Primzahlen zu würfeln.	$\frac{1}{8}=12{,}5\%$
1.5	Gib alle Summenzahlen an, die beim Casinospiel mit der größten Wahrscheinlichkeit erscheinen.	$\{10;11\}$
1.6	Der Kleinkriminielle Aron K. hat eine besondere Taktik beim Casinospiel: Wenn er verliert, verdoppelt er seinen Einsatz. Er spielt 2er-Pasch bei einer Quote von 1:2 und setzt zuerst 5€. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass er bei einem Anfangsguthaben von 1000€ in kürztmöglicher Zeit alles verliert.	$\frac{1}{256}=0{,}39\%$
1.7	Berechne die Wahrscheinlichkeit, beim Ziehen von zwei Karten aus einem Skatspiel zwei rote Karten zu ziehen.	$\frac{15}{62}=24{,}2\%$
1.8	Berechne die Wahrscheinlichkeit, beim Ziehen von zwei Karten aus einem Skatspiel keinen König zu ziehen.	$\frac{189}{248}=76{,}2\%$
1.9	Drei Spieler ziehen je zwei Karten aus dem gleichen Skatblatt (ohne Zurücklegen). Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Spieler zwei Asse hat.	$3{,}62\%$
1.10	Sobald es an einem Tag auch nur kurz regnet, nennen wir den Tag einen "Regentag". Nehmen wir, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Regentag 60% beträgt, wenn der Tag zuvor auch ein Regentag war. War der Tag zuvor trocken, liegt die Wahrscheinlichkeit für einen Regentag nur bei 20%. Berechne die Wahrscheinlichkeit für einen Regentag am dritten Tag, wenn der erste Tag ebenfalls ein Regentag war.	$\frac{11}{25}=44\%$
1.11	In einer Urne befinden sich 5 rote, 2 schwarze, 3 weiße und 10 gelbe Kugeln. Berechne die Wahrscheinlichkeit, beim gleichzeitigen Ziehen von 5 Kugeln keine gelbe Kugel zu ziehen.	$\frac{21}{1292}=1{,}63\%$
1.12	Berechne für das Experiment aus 1.11 die Wahrscheinlichkeit beim gleichzeitigen Ziehen von 5 Kugeln mindestens eine gelbe Kugel zu ziehen.	$\frac{1271}{1292}=98{,}4\%$

1.13	Berechne für das Experiment aus 1.11 die Wahrscheinlichkeit beim gleichzeitigen Ziehen von 5 Kugeln höchstens 2 schwarze Kugeln zu ziehen.	$1=100\,\%$
1.14	Berechne die Wahrscheinlichkeit beim normalen Roulettespiel (Zahlen 0-36, siehe Anhang) 5 Mal hintereinander zu gewinnen, wenn man jedes Mal auf "Rot" setzt.	$0{,}027=2{,}7\,\%$
1.15	Berechne die Wahrscheinlichkeit beim normalen Roulettespiel (Zahlen 0-36, siehe Anhang) bei 5 Spielen mindestens einmal zu gewinnen, wenn man jedes Mal auf "Rot" setzt.	$0{,}964=96{,}4\,\%$
1.16	Berechne die Wahrscheinlichkeit beim normalen Roulettespiel (Zahlen 0-36, siehe Anhang) netto Geld zu gewinnen, wenn man gleichzeitig auf "Rot" (Quote 1:2) und auf "zweites Dutzend" (Zahlen 13-24; Quote 1:3) einen Euro setzt.	$\frac{12}{37}=32{,}4\,\%$

Aufgabe 2: Kombinatorik

Löse die Aufgabe auf diesem Aufgabenblatt. Trage den Lösungsterm und die Lösung in die Tabelle ein. Aufgabe 2.0 zeigt ein prinzipielles Beispiel (nicht aus der Kombinatorik).

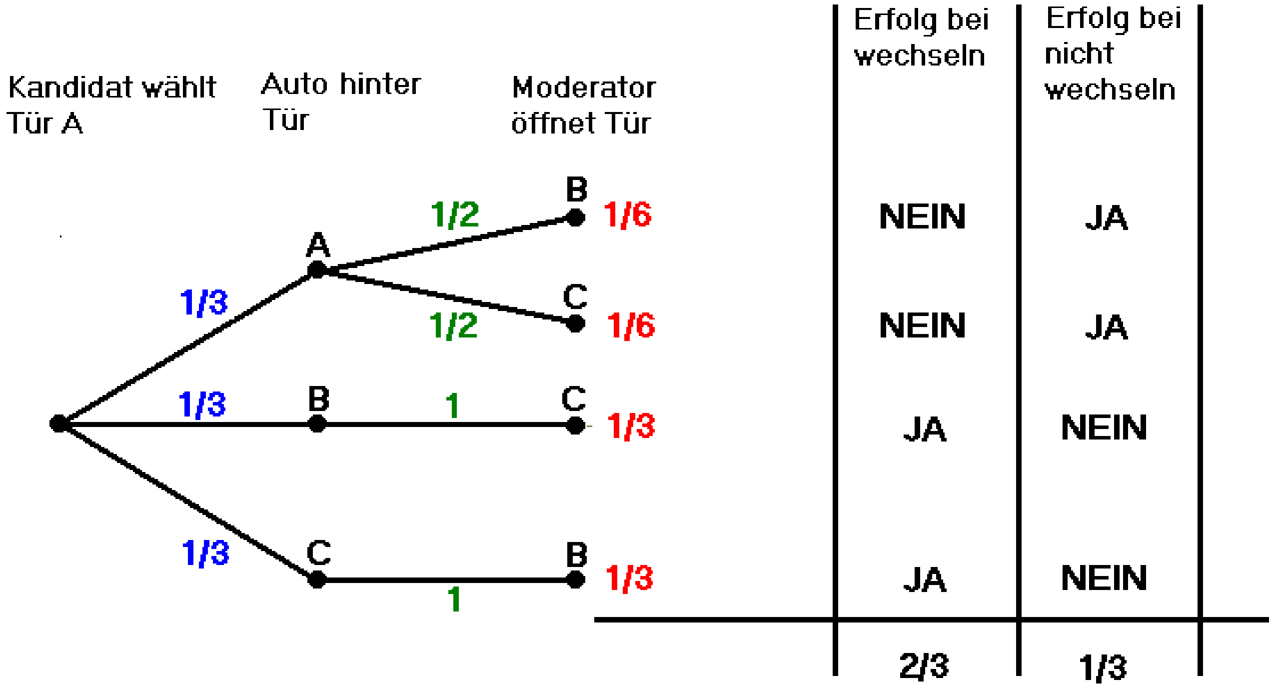
Nr.	Aufgabe	Term	Lösung
2.0	*In einem Korb liegen fünf Äpfel, zwei Birnen, drei Melonen und zwei Autoreifen. Berechne die Anzahl der Früchte im Korb.*	$5+2+3$	10
2.1	Berechne die Anzahl der Tippscheine, die man beim Fußballtoto ausfüllen muss, um auf jeden Fall den Hauptpreis zu gewinnen. (Toto: Tipp auf 9 Fußballspiele mit den möglichen Ergebnissen "Sieg", "Niederlage" und "Unentschieden)	3^9	19683
2.2	Berechne die Anzahl der Lottoscheine, die man beim Lotto "6 aus 49" ausfüllen muss, um auf jeden Fall "6 Richtige" zu bekommen. (Pro Lottoschein kann man 14 Tipps abgeben).	$\binom{49}{6}:14$	998844
2.3	Berechne die Anzahl der Gewinntipps mit "5 Richtigen", wenn man wie in Aufgabe 2.2 alle möglichen Tipps im Lotto "6 aus 49" ausgefüllt hat.	$\binom{6}{5}\cdot\binom{43}{1}$	258
2.4	Berechne die Anzahl der Möglichkeiten, fünf Personen in eine Reihe zu stellen.	$5!$	120
2.5	Berechne die Anzahl der Möglichkeiten, fünf Personen auf Stühle in einem Kreis zu setzen.	$5!:5=4!$	24
2.6	Jetzt spielen wir "Reise nach Jerusalem" und nehmen einen Stuhl weg. Berechne die Anzahl der Möglichkeiten vier der fünf Personen auf Stühle in einem Kreis zu setzen.	$\binom{5}{4}\cdot 4!:4=\binom{5}{4}\cdot 3!$	30
2.7	Bei einem Badmintonturnier treten 4 Frauen und 6 Männer an. Berechne die Anzahl der Partien, wenn jeder gegen jeden im Einzel antritt.	$\binom{10}{2}$	45

2.8	Berechne die Anzahl der unterschiedlichen Doppelteams, die man aus den 10 Spielern bilden kann ohne Berücksichtigung des Geschlechts.	$\binom{10}{2}$	45
2.9	Berechne die Anzahl der unterschiedlichen Doppelteams, die man aus den 10 Spielern von Aufgabe 2.8 bilden kann, wenn es reine Frauen- und Männerteams geben soll.	$\binom{4}{2}+\binom{6}{2}$	21
2.10	Berechne die mögliche Anzahl unterschiedlicher Mixedteams, die man aus den 10 Spielern von Aufgabe 2.8 bilden kann.	$4\cdot 6$	24
2.11	In einer Schulklasse sind 24 Schüler, darunter 10 Mädchen und 14 Jungen. Es werden 5 Freikarten für das Kino angeboten. Berechne die Anzahl der Möglichkeiten die nummerierten Sitzplatzkarten auf die Schüler zu verteilen.	$24\cdot 23\cdot 22\cdot 21\cdot 20 = \frac{24!}{19!} = \binom{24}{5}\cdot 5!$	5100480
2.12	In der Schulklasse aus Aufgabe 2.11 sollen im Sportunterricht zwei Fußballmannschaften bestimmt werden, die durch zwei Mannschaftskapitäne frei gewählt werden. Berechne die Anzahl der unterschiedlichen Mannschaften, die gebildet werden können.	$\binom{22}{11}\cdot 2$	1410864
2.13	Bei einer Klassenarbeit gibt es drei Einsen, neun Zweien, sieben Dreien, vier Vieren und eine Fünf. Berechne die Anzahl der Möglichkeiten, dieses Resultat auf die Schüler der Klasse aus Aufgabe 2.11 aufzuteilen.	$\frac{24!}{3!\cdot 9!\cdot 7!\cdot 4!\cdot 1!}$	$2{,}36\cdot 10^{12}$
2.14	Berechne die Anzahl der Möglichkeiten, aus den Buchstaben des Wortes VOLLMILCHSCHOKOLADENVERPACKUNG neue Wörter zu bilden. (Die Wörter müssen keinen Sinn ergeben).	$\frac{30!}{(2!)^6\cdot(3!)^2\cdot 4!}$	$4{,}80\cdot 10^{27}$
2.15	Von den 16 Kombinatorikaufgaben einer Kursarbeit hat ein Schüler zwölf Aufgaben richtig gelöst und vier Aufgaben nicht bearbeitet. Es gibt acht Aufgaben mit 4 Punkten, drei Aufgaben mit 3 Punkten und fünf Aufgaben mit 2 Punkten. Berechne die Punkteanzahl, die der Schüler mindestens erreicht hat.	$5\cdot 2+3\cdot 3+4\cdot 4$	35
2.16	Ein anderer Schüler hat von den 16 Kombinatorikaufgaben nur sechs Aufgaben richtig gelöst, darunter die Aufgaben 2 und 11. Berechne die Anzahl der Möglichkeiten, die es für die sechs richtig gelösten Aufgaben gibt.	$\binom{14}{4}$	1001

<u>Aufgabe 3:</u> Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Satz von Bayes

<u>3.1</u> Beschreibe das Ziegenproblem, zeichne einen passenden Wahrscheinlichkeitsbaum, und erkläre die Lösung. Löse die Aufgabe hier auf diesem Blatt.

Ein Kandidat hat die Wahl zwischen drei Toren. Hinter einem Tor ist der Hauptgewinn, ein Auto. Hinter den beiden anderen Toren sind Ziegen, also die Nieten.
Nach der Wahl des Tores öffnet der Gamehost eines der beiden anderen Tore und zeigt eine Ziege. Der Kandidat hat nun die Möglichkeit seine Wahl zu überdenken und auf das andere Tor zu wechseln. Ist es günstiger für den Kandidaten das Tor zu wechseln, nachdem der Host eine Ziege gezeigt hat? Baum:



Antwort: Es ist günstiger zu wechseln, denn beim Wechsel gewinnt der Kandidat in 2/3 der Fälle.

<u>3.2</u> Löse die folgenden Aufgaben mit einer Methode deiner Wahl auf diesem Aufgabenblatt. Trage die Lösung und den Lösungsterm in die Tabelle ein.

Nr.	**Aufgabe**	**Term**	**Lösung**
<u>3.1.</u>	Bei einer Reihenuntersuchung für eine Immunschwächekrankheit kommt ein Test zum Einsatz, der mit 99,9%iger Wahrscheinlichkeit ein positives Ergebnis liefert, wenn der Proband infiziert ist (Sensitivität des Tests) und mit 99,8%iger Wahrscheinlichkeit negativ ausfällt, wenn der Proband gesund ist (Spezifizität des Tests). Statistische Erhebungen haben ergeben, dass 0.1% der Bevölkerung infiziert sind.	Ereignis A: Infiziert $P(A)=0{,}001$ Ereignis B: Test pos. $P(B)=0{,}999\cdot 0{,}001$ $+0{,}002\cdot 0{,}999$ $=0{,}002997$ $P_A(B)=0{,}999$	
<u>3.1.1</u>	Ein Mann erfährt nach der Teilnahme am Test von seinem positiven Ergebnis. Berechne, mit welcher Wahrscheinlichkeit ist der Mann tatsächlich infiziert ist.	$P_B(A)=\dfrac{P_A(B)\cdot P(A)}{P(B)}$ $=\dfrac{0{,}999\cdot 0{,}001}{0{,}002997}$	$\dfrac{1}{3}=$ $33{,}3\,\%$

3.1.2	Der Mann unterzieht sich nach dem ersten Test noch einem zweiten Test mit gleicher Sensitivität und Sensibilität. Berechne die veränderte Wahrscheinlichkeit, dass der Mann infiziert ist, wenn auch der zweite Test positiv ausfällt.	Ereignis A: Infiziert $P(A)=\frac{1}{3}$ Ereignis B: Test pos. $P(B)=0{,}999\cdot 0{,}\overline{3}$ $+0{,}002\cdot 0{,}\overline{6}$ $=1003/3000=0{,}334\overline{3}$ $P_A(B)=0{,}999$ $P_B(A)=\frac{P_A(B)\cdot P(A)}{P(B)}$ $=\frac{0{,}999\cdot 1/3}{1003/3000}$	$\frac{999}{1003}$ $=99{,}6\%$
3.2	Der Schüler Manuel S. fährt an 80% aller Schultage mit dem Bus nach Hause. In zwei Dritteln dieser Fälle kommt er pünktlich an. Durchschnittlich ist er an 3 von 5 Tagen pünktlich zu Hause. Eines Abends ist er pünktlich zu Hause. Berechne die Wahrscheinlichkeit mit der er Bus gefahren ist.	A: Bus gefahren $P(A)=0{,}8$ B: pünktlich $P(B)=0{,}6$ $P_A(B)=2/3$ $P_B(A)=\frac{2/3\cdot 0{,}8}{0{,}6}$	$\frac{8}{9}$ $=88{,}9\%$
3.3	In einem Gefäß A befinden sich zwei rote und fünf schwarze Kugeln und in einem Gefäß B vier rote und vier schwarze Kugeln. Ein Gefäß wird zufällig ausgewählt und aus diesem Gefäß wird dann eine Kugel gezogen. Diese Kugel ist schwarz. Berechne die Wahrscheinlichkeit mit der die Kugel aus Gefäß A stammt.	A: Gefäß A gewählt $P(A)=0{,}5$ B: schwarze Kugel $P(B)=0{,}5\cdot 5/7+0{,}5\cdot 0{,}5$ $=17/28$ $P_A(B)=5/7$ $P_B(A)=\frac{5/7\cdot 0{,}5}{17/28}$	$\frac{10}{17}$ $=58{,}8\%$
3.4	Zur Früherkennung einer Stoffwechselkrankheit bei Säuglingen gibt es eine neue Untersuchungs-methode. Bei der Anwendung wird in nur 0.01% aller Fälle eine vorliegende Erkrankung nicht entdeckt, während die Methode in 0.1% aller Fälle irrtümlich die Erkrankung anzeigt. Durchschnittlich haben bei 1.1 Millionen Geburten 100 Säuglinge diese Stoffwechselerkrankung. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass ein als krank diagnostizierter Säugling die Krankheit nicht hat.	A: Infiziert $P(A)=1/11000$ B: Test pos. $P(B)=1/11000\cdot 0{,}9999$ $+10999/11000\cdot 0{,}001$ $=0{,}00109$ $P_A(B)=0{,}9999$ $1-\frac{0{,}9999\cdot 1/11000}{0{,}00109}$	$\frac{9991}{10900}$ $=91{,}7\%$

<u>Aufgabe 4:</u> Bernoulli-Ketten

Löse die folgenden Aufgaben mit einer Methode deiner Wahl auf diesem Aufgabenblatt. Trage den Lösungsterm und die Lösung in die Tabelle ein.

Zehn Äpfel liegen in einer Reihe. Jeder Apfel ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 40% wurmstichig.

Nr.	Aufgabe	Term	Lösung
	Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass		
4.1.1	alle Äpfel wurmstichig sind.	$0{,}4^{10}$	$0{,}0104\,\%$
4.1.2	kein Apfel wurmstichig ist.	$0{,}6^{10}$	$0{,}605\,\%$
4.1.3	die ersten vier Äpfel wurmstichig sind.	$0{,}4^{4}$	$\frac{16}{625}=2{,}56\,\%$
4.1.4	die ersten vier Äpfel wurmstichig und die anderen nicht wurmstichig sind.	$0{,}4^{4}\cdot 0{,}6^{6}$	$0{,}12\,\%$
4.1.5	vier beliebige Äpfel wurmstichig und die anderen nicht wurmstichig sind.	$\binom{10}{4}\cdot 0{,}4^{4}\cdot 0{,}6^{6}$	$25{,}1\,\%$
4.1.6	unter den ersten 5 Äpfeln genau zwei wurmstichige Äpfel sind und unter den zweiten 5 Äpfeln auch genau zwei wurmstichige Äpfel sind.	$\left(\binom{5}{2}\cdot 0{,}4^{2}\cdot 0{,}6^{3}\right)^{2}$	$11{,}9\,\%$

<u>4.2</u> Ein Supermarkt nimmt eine Apfellieferung nur an, wenn der Anteil der wurmstichigen Äpfel maximal 40% ist. Bei Stichproben von je 10 Äpfeln werden nun wiederholt 7 oder mehr wurmstichige Äpfel gefunden. Entscheide, ob der Supermarkt die Lieferung ablehnen soll. Begründe deine Entscheidung mathematisch mit einer Rechnung.

Angenommen, der Anteil beträgt tatsächlich 40%. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass unter dieser Bedingung bei der Stichprobe 7, 8, 9 oder 10 Treffer auftauchen, so wie es offenbar passiert?

$$\begin{aligned} P &= P(X=7)+P(X=8)+P(X=9)+P(X=10) \\ &= \binom{10}{7}\cdot 0{,}4^{7}\cdot 0{,}6^{3}+\binom{10}{8}\cdot 0{,}4^{8}\cdot 0{,}6^{2}+\binom{10}{9}\cdot 0{,}4^{9}\cdot 0{,}6+0{,}4^{10} \\ &= 0{,}04247+0{,}01062+0{,}001573+0{,}001049=0{,}055712 \end{aligned}$$

Wenn wir annehmen, dass nur 40% der Äpfel wurmstichig sind, beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass die Stichproben 7 oder mehr wurmstichige Äpfel haben, nur 5,5%.

Es ist also eher wahrscheinlich, dass die Annahme falsch ist und mehr Äpfel wurmstichig sind.

Also lehnen wir die Lieferung ab.