Mathematik GK m2, 2. KA – Fkt., Steigungen, Ableitungen – Lösung **19.06.2015**

Aufgabe 1: Polynomdivision, Summen multiplizieren und Nullstellen

1.1 Berechne $(6x^6+4x^5+6x^4+4x^3+8x^2+10):(3x^4+2x^3+4)$

$$
\begin{array}{l}
(6x^6+4x^5+6x^4+4x^3+8x^2+10):(3x^4+2x^3+4)=2x^2+2+\dfrac{2}{3x^4+2x^3+4} \quad (=2x^2+2 \;\; \text{Rest } 2\,) \\
-(6x^6+4x^5 \qquad\qquad +8x^2) \\
\hline
\qquad 6x^4+4x^3+10 \\
\quad -(6x^4+4x^3+8) \\
\hline
\qquad\qquad 2
\end{array}
$$

1.2 Berechne $(p+q)^8$

$$(p+q)^8=p^8+8p^7q+28p^6q^2+56p^5q^3+70p^4q^4+56p^3q^5+28p^2q^6+8pq^7+q^8$$

1.3 Berechne die Nullstellen der Funktion $f(x)=-\frac{1}{2}x+2$

$$0=-\frac{1}{2}x_n+2 \quad |-2 \;\Leftrightarrow\; -2=-\frac{1}{2}x_n \quad |\cdot(-2) \;\Leftrightarrow\; \mathbf{4=x_n}$$

1.4 Berechne die Nullstellen der Funktion $g(x)=2x^2-x-4$

$$0=2x_n^2-x_n-4 \quad |:2 \;\Leftrightarrow\; 0=x_n^2-\frac{1}{2}x_n-2 \quad \text{p-q-Formel}$$

$$\Rightarrow\; x_{1/2}=\frac{1}{4}\pm\sqrt{\frac{1}{16}+2}=\frac{1}{4}\pm\sqrt{\frac{33}{16}}=\frac{1}{4}\pm\frac{\sqrt{33}}{4} \;\Rightarrow\; \mathbf{x_1=\frac{1-\sqrt{33}}{4}} \;;\; \mathbf{x_2=\frac{1+\sqrt{33}}{4}}$$

1.5 Berechne die Nullstellen der Funktion $h(x)=x^5+3x^4-6x^3-8x^2$

$0=x_n^5+3x_n^4-6x_n^3-8x_n^2=x_n^2\cdot(x_n^3+3x_n^2-6x_n-8)$ Damit ist $\mathbf{x_1=0}$ eine doppelte Nullstelle.

Setze die Klammer gleich 0: $0=x_n^3+3x_n^2-6x_n-8$ Finde $\mathbf{x_2=2}$ durch Probieren.

Polynomdivision: $$\begin{array}{l}(x^3+3x^2-6x-8):(x-2)=x^2+5x+4\\ -(x^3-2x^2)\\ \hline \quad 5x^2-\;\;6x-8\\ \;-(5x^2-10x)\\ \hline \qquad 4x-8\\ \quad -(4x-8)\\ \hline \qquad\quad 0\end{array}$$	$0=x_n^2+5x_n+4$ p-q-Formel $$\Rightarrow x_{3/4}=-2{,}5\pm\sqrt{2{,}5^2-4}=-2{,}5\pm\sqrt{2{,}25}=-2{,}5\pm1{,}5$$ $$\Rightarrow \mathbf{x_3=-4} \;;\; \mathbf{x_4=-1}$$

Mathematik GK m2, 2. KA – Fkt., Steigungen, Ableitungen – Lösung 19.06.2015

Aufgabe 2: Durchschnittliche und momentane Steigungen

2.1 Berechne den Differenzenquotienten für die Funktion $f(x)=2x^2+4$ im Intervall $[1;8]$.

$$\boldsymbol{m}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(8)-f(1)}{8-1}=\frac{(2\cdot 8^2+4)-(2\cdot 1^2+4)}{7}=\frac{132-6}{7}=\frac{126}{7}=\mathbf{18}$$

2.2 Berechne die lineare Näherungsfunktion für die Funktion $f(x)=2^x$ im Intervall $[0;4]$.

$$\boldsymbol{m}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(4)-f(0)}{4-0}=\frac{2^4-2^0}{4}=\frac{15}{4}$$ Geradengleichung: $g(x)=mx+n$

Der Punkt $(0|1)$ liegt auf dem Graphen von f und von g. Einsetzen in $g: 1=m\cdot 0+n \Leftrightarrow 1=n$

Also $\boldsymbol{g(x)=\frac{15}{4}x+1}$

2.3 Berechne den Differentialquotienten für die Funktion $f(x)=2x^3+4$ an der Stelle $x_0=2$ mit der „h-Methode".

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f'(2)}&=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2(2+h)^3+4-(2\cdot 2^3+4)}{h}=2\cdot\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^3-2^3}{h}\\&=2\cdot\lim_{h\to 0}\frac{2^3+3\cdot 2^2h+3\cdot 2h^2+h^3-2^3}{h}=2\cdot\lim_{h\to 0}\frac{12h+6h^2+h^3}{h}\\&=2\cdot\lim_{h\to 0}12+6h+h^2=2\cdot(12+0+0)=\mathbf{24}\end{aligned}$$

2.4 Berechne den Differentialquotienten für die Funktion $f(x)=2x^3+4$ an der Stelle $x_0=2$ mit der „x-Methode".

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{2x^3+4-(2\cdot 2^3+4)}{x-2}=2\cdot\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2^3}{x-2}=2\cdot\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}$$

Polynomdivision: $(x^3 \quad -8):(x-2)=x^2+2x+4$ $-(x^3-2x^2)$ $2x^2-8$ $-(2x^2-4x)$ $4x-8$ $-(4x-8)$ 0	Also $\boldsymbol{f'(2)}=2\cdot\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=2\cdot\lim_{x\to 2}x^2+2x+4$ $=2\cdot(2^2+2\cdot 2+4)$ $=2\cdot(4+4+4)=\mathbf{24}$

Aufgabe 3: Ableitungsfunktion rechnerisch

Berechne Ableitungsfunktionen der folgenden Funktionen mit Hilfe des Differentialquotienten.

Mathematik GK m2, 2. KA – Fkt., Steigungen, Ableitungen – Lösung **19.06.2015**

3.1 $f(x)=5x^2-20$ Berechne die 1. und 2. Ableitung.

$$\boldsymbol{f'(x)}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{5(x+h)^2-20-(5\cdot x^2-20)}{h}=5\cdot\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$$

$$=5\cdot\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2\text{xh}+h^2-x^2}{h}=5\cdot\lim_{h\to 0}\frac{2\text{xh}+h^2}{h}=5\cdot\lim_{h\to 0}2\text{x}+h=5\cdot(2\text{x}+0)=\mathbf{10x}$$

$$\boldsymbol{f''(x)}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{10\cdot(x+h)-10x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{10\text{x}+10\text{h}-10x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{10\text{h}}{h}$$

$=\lim_{h\to 0}10=\mathbf{10}$ Also $\boldsymbol{f'(x)=10x\ ;\ f''(x)=10}$

3.2 $g(x)=\frac{4}{x}$ Berechne die 1. Ableitung.

$$g'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{4}{x_0}-\frac{4}{x}}{x-x_0}=4\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}}{x-x_0}=4\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{x_0}{x\cdot x_0}-\frac{x}{x\cdot x_0}}{x-x_0}$$

$$=4\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{x_0-x}{x\cdot x_0}}{x-x_0}=4\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{-(x-x_0)}{x\cdot x_0}}{x-x_0}=4\cdot\lim_{x\to x_0}\left(-\frac{1}{x\cdot x_0}\right)=4\cdot\left(\frac{-1}{x_0\cdot x_0}\right)=-\frac{4}{x_0^2}$$

Also $\boldsymbol{g'(x)=-\frac{4}{x^2}}$

3.3 $h(x)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{4\text{x}}$ Berechne die 1. Ableitung.

$$h(x)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{4\text{x}}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{x}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{x}=\sqrt{x}$$

$$h'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

Also $\boldsymbol{h'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}}$

Aufgabe 4: Tangentengleichung

Berechne für die Funktion $f(x)=x^2$ die Funktionsgleichung der Tangenten an der Stelle $x_0=4$ mit Hilfe des Differentialquotienten.

Steigung der Tangente ist die momentane Steigung von f an der Stelle $x_0=4$.

Mathematik GK m2, 2. KA – Fkt., Steigungen, Ableitungen – Lösung **19.06.2015**

$$f'(4)=\lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(4+h)^2-4^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4^2+2\cdot 4\cdot h-4^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{8\cdot h}{h}=\lim_{h\to 0}8=8$$

Die Tangentengleichung hat ist eine lineare Gleichung vom Typ $g(x)=mx+n$

Der Punkt $(4|f(4))$ liegt auf dem Graphen von f und von g. Einsetzen in g:

$f(4)=m\cdot 4+n$ $\quad f(4)=4^2=16.$ $\quad m=8.$ Einsetzen:
$16=8\cdot 4+n \quad |-32 \quad \Leftrightarrow \quad -16=n$

Also $\mathbf{g(x)=8x-16}$

<u>Aufgabe 5:</u> Ableitungsfunktionen graphisch

Löse diese Aufgabe hier auf dem Blatt. Zeichne für den abgebildeten Graphen die Graphen der 1., 2. und 3. Ableitung in verschiedenen Farben ein. Kennzeichne, welcher Graph welche Ableitungsfunktion darstellen soll.