Mathematik GK 11 m3, AB 03 – Parabelen und Exponentialfkt. – Lösung 03.11.2014

Aufgabe 1: Gegeben sind drei Punkte A, B und C, die auf dem Graphen einer Parabelfunktion liegen. Bestimme die Funktionsgleichung der Parabel in der Normalform.

1.1 A(-3|7), B(-1|3), C(0|4) Lösung: $f(x)=x^2+2x+4$

1.2 A(-1|-7), B(1|-3), C(2|-4) Lösung: $f(x)=-x^2+2x-4$

1.3 A(-1|0), B(0|5), C(2|0) Lösung: $f(x)=-2{,}5x^2+2{,}5x+5$

1.4 A(-5|-1,5), B(-1|2,5), C(2|-5) Lösung: $f(x)=-\frac{1}{2}x^2-2x+1$

Aufgabe 2: Berechne den Scheitelpunkt der Parabel, die durch die Punkte A, B und C geht.

2.1 A(0|-3), B(1|-5), C(4|1) Lösung: $f(x)=x^2-3x-3$ S(1,5|-5,25)

2.2 A(-4|-9), B(-2|-4), C(3|-0,25) Lösung: $f(x)=-\frac{1}{4}x^2+x-1$ S(2|0)

Aufgabe 3: Berechne den Scheitelpunkt und die Nullstellen der Parabel, die durch die Punkte A, B und C geht.

3.1 A(0|-8), B(1|-5), C(4|16) Lösung: $f(x)=x^2+2x-8$ S(-1|-9) $x_{n1}=-4\,;x_{n2}=2$

3.2 A(-6|16), B(6|28), C(10|64) Lösung: $f(x)=0{,}5x^2+x+4$ S(-1|3,5) keine Nullstellen

Allgemein ist $f(t)=N_0\cdot a^t$. Hier ist $N_0=1\,kg$ und *a* der Wachstumsfaktor für *t in Jahren*. Laut Aufgabenstellung liegt der Punkt $(10|0{,}7859647327)$ auf dem Graphen der Funktion. Einsetzen:

$$
\begin{aligned}
&0{,}7859647327\,kg=1\,kg\cdot a^{10} \quad |\ :1\,kg\\
&\Leftrightarrow 0{,}7859647327=a^{10} \quad |\ ^{\frac{1}{10}}\\
&\Leftrightarrow 0{,}7859647327^{\frac{1}{10}}=a\\
&\Leftrightarrow 0{,}9762033775\approx a
\end{aligned}
$$

Damit ist $\boldsymbol{f(t)=N_0\cdot 0{,}9762033775^t}$

Aufgabe 4: Bei der Reaktorkatastrophe von Tschernobyl im Jahre 1986 wurden unter anderem große Mengen Strontium-90 freigesetzt. Von jedem Kilogramm Strontium-90 waren nach zehn Jahren noch 785,9647327 g übrig.

4.1 Zeige, dass der Zerfall von Strontium-90 mit Hilfe der Funktion $f(t)=N_0\cdot 0{,}9762033775^t$ (t in Jahren) beschrieben werden kann.

Allgemein ist $f(t)=N_0\cdot a^t$. Hier ist $N_0=1\,kg$ und *a* der Wachstumsfaktor für *t in Jahren*. Laut Aufgabenstellung liegt der Punkt $(10|0{,}7859647327)$ auf dem Graphen der Funktion. Einsetzen:

$$0{,}7859647327\,kg=1\,kg\cdot a^{10} \quad |\ :1\,kg$$

$$\Leftrightarrow 0{,}7859647327 = a^{10} \quad | \ ^{\frac{1}{10}}$$
$$\Leftrightarrow 0{,}7859647327^{\frac{1}{10}} = a$$
$$\Leftrightarrow 0{,}9762033775 \approx a$$

Damit ist $\boldsymbol{f(t) = N_0 \cdot 0{,}9762033775^t}$

<u>4.2</u> Berechne, wie viel Strontium-90 heute (nach 28 Jahren) von jedem Kilogramm noch übrig ist.

$$f(28) = 1\,kg \cdot 0{,}9762033775^{28} \approx \mathbf{0{,}50948\,kg}$$

A: Nach 28 Jahren sind pro Kilogramm noch 509,48 g übrig.

<u>4.3</u> Berechne die Halbwertszeit von Strontium-90.

$f(T_{1/2}) = 500\,g$ Einsetzen:

$$500\,g = 1000\,g \cdot 0{,}9762033775^{T_{1/2}} \quad | \ :1000\,g$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = 0{,}9762033775^{T_{1/2}} \quad | \ \ln$$
$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(0{,}9762033775^{T_{1/2}}\right) \quad | \ T$$
$$\Leftrightarrow -\ln(2) = T_{1/2} \cdot \ln(0{,}9762033775) \quad | \ :\ln(0{,}9762033775)$$
$$\Leftrightarrow -\frac{\ln(2)}{\ln(0{,}9762033775)} = T_{1/2}$$
$$\Leftrightarrow \mathbf{28{,}78 \approx T_{1/2}}$$

A: Die Halbwertszeit beträgt 28,78 Jahre.

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = 0{,}9762033775^{T_{1/2}} \quad | \ \ln$$
$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(0{,}9762033775^{T_{1/2}}\right) \quad | \ T$$
$$\Leftrightarrow -\ln(2) = T_{1/2} \cdot \ln(0{,}9762033775) \quad | \ :\ln(0{,}9762033775)$$
$$\Leftrightarrow -\frac{\ln(2)}{\ln(0{,}9762033775)} = T_{1/2}$$
$$\Leftrightarrow \mathbf{28{,}78 \approx T_{1/2}}$$

A: Die Halbwertszeit beträgt 28,78 Jahre.