Mathematik LK 12 M1, 4. Kursarbeit – Matrizen und Stochastik – Lösung 11.06.2014

Aufgabe 1: Berechne die Determinante und die Transponierte der folgenden Matrizen:

1.1 $M=\begin{pmatrix}0 & 4\\ 1 & 4\end{pmatrix}$ $\quad \boldsymbol{det\ M}=0\cdot 4-1\cdot 4=\mathbf{-4}$ $\quad \boldsymbol{M^T=}\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{1}\\ \mathbf{4} & \mathbf{4}\end{pmatrix}$

1.2 $A=\begin{pmatrix}-5 & 3 & -3\\ -1 & 1 & 3\\ -3 & 0 & 1\end{pmatrix}$ $\quad \boldsymbol{A^T=}\begin{pmatrix}\mathbf{-5} & \mathbf{-1} & \mathbf{-3}\\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{-3} & \mathbf{3} & \mathbf{1}\end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{det\ M}=-5\cdot 1\cdot 1+3\cdot 3\cdot(-3)+(-3)\cdot(-1)\cdot 0-(-3)\cdot 1\cdot(-3)-0\cdot 3\cdot(-5)-1\cdot(-1)\cdot 3=\mathbf{-38}$$

1.3 $B=(\pi)$ $\quad \boldsymbol{det\ B}=\boldsymbol{\pi}$ $\quad \boldsymbol{B^T=(\pi)}$

Aufgabe 2: Berechne mit Hilfe der Cramerschen Regel

2.1 Löse das folgende LGS

$I.\quad -4x+3y=-3{,}5$ $II.\quad 4x=-52$ $(A,b)=\left(\begin{array}{cc\|c}-4 & 3 & -3{,}5\\ 4 & 0 & -52\end{array}\right)$	$\boldsymbol{x}=\dfrac{\begin{vmatrix}-3{,}5 & 3\\ -52 & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-4 & 3\\ 4 & 0\end{vmatrix}}=\dfrac{-3{,}5\cdot 0-(-52)\cdot 3}{-4\cdot 0-4\cdot 3}=\dfrac{156}{-12}=\mathbf{-13}$ $\boldsymbol{y}=\dfrac{\begin{vmatrix}-4 & -3{,}5\\ 4 & -52\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-4 & 3\\ 4 & 0\end{vmatrix}}=\dfrac{-4\cdot(-52)-4\cdot(-3{,}5)}{-4\cdot 0-4\cdot 3}=\dfrac{222}{-12}=\mathbf{-18{,}5}$

2.2 Berechne c für das folgende LGS

$I.\quad -3a+6b-8c=-3$

$II.\quad -a+2b-2c=8$

$III.\quad a+2c=22$

$$(A,b)=\left(\begin{array}{ccc|c}-3 & 6 & -8 & -3\\ -1 & 2 & -2 & 8\\ 1 & 0 & 2 & 22\end{array}\right) \qquad c=\frac{\begin{vmatrix}-3 & 6 & -3\\ -1 & 2 & 8\\ 1 & 0 & 22\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-3 & 6 & -8\\ -1 & 2 & -2\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}}$$

$$\boldsymbol{c}=\frac{-3\cdot 2\cdot 22+6\cdot 8\cdot 1+(-3)\cdot(-1)\cdot 0-1\cdot 2\cdot(-3)-0\cdot 8\cdot(-3)-22\cdot(-1)\cdot 6}{-3\cdot 2\cdot 2+6\cdot(-2)\cdot 1+(-8)\cdot(-1)\cdot 0-1\cdot 2\cdot(-8)-0\cdot(-2)\cdot(-3)-2\cdot(-1)\cdot 6}=\frac{54}{4}=\mathbf{13{,}5}$$

Aufgabe 3: Gegeben sind die Matrizen und Vektoren

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix},\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix},A=\begin{pmatrix}2 & -2 & -4\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}2 & -2 & -4\\ 2 & -2 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix},D=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ -4 & -4 & -4\end{pmatrix},E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Berechne, falls möglich, die folgenden Terme. Gib eine Begründung an, falls die Berechnung nicht möglich ist.

3.1 $A\cdot\vec{a}$ geht nicht, weil Dimension des Vektors ungleich Anzahl Spalten der Matrix

Mathematik LK 12 M1, 4. Kursarbeit – Matrizen und Stochastik – Lösung 11.06.2014

3.2 $\boldsymbol{A}\cdot\vec{\boldsymbol{b}}=\begin{pmatrix}2\cdot0-2\cdot0-4\cdot1\\0\cdot0-2\cdot0+0\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{-4}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}$

3.3 $A+C$ geht nicht, weil Dimensionen der Matrizen gleich sein müssen

3.4 $\boldsymbol{D-C}=\begin{pmatrix}1-2 & 1-(-2) & 1-(-4)\\2-2 & 2-(-2) & 2-0\\-4-2 & -4-0 & -4-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{5}\\\mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{2}\\\mathbf{-6} & \mathbf{-4} & \mathbf{-5}\end{pmatrix}$

3.5 $\boldsymbol{C\cdot D}=\begin{pmatrix}2\cdot1-2\cdot2-4\cdot(-4) & 2\cdot1-2\cdot2-4\cdot(-4) & 2\cdot1-2\cdot2-4\cdot(-4)\\2\cdot1-2\cdot2+0\cdot(-4) & 2\cdot1-2\cdot2+0\cdot(-4) & 2\cdot1-2\cdot2+0\cdot(-4)\\2\cdot1-0\cdot2+1\cdot(-4) & 2\cdot1-0\cdot2+1\cdot(-4) & 2\cdot1-0\cdot2+1\cdot(-4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{14} & \mathbf{14} & \mathbf{14}\\\mathbf{-2} & \mathbf{-2} & \mathbf{-2}\\\mathbf{-2} & \mathbf{-2} & \mathbf{-2}\end{pmatrix}$

3.6 $\boldsymbol{C\cdot E}=C=\begin{pmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{-2} & \mathbf{-4}\\\mathbf{2} & \mathbf{-2} & \mathbf{0}\\\mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{pmatrix}$ weil E Einheitsmatrix

Aufgabe 4: In einem Körper K sind die Matrizen $A\in K^{m\,x\,n}$ und $B,C\in K^{p\,x\,q}$ und Vektoren $x\in K^r$ sowie ein Skalar $\alpha\in K$ gegeben. Gib für die folgenden Rechengesetze Beispiele mit diesen Matrizen/Vektoren an. Gib außerdem, falls nötig, Bedingungen für die Dimensionen an. Falls das angegebene Gesetz nicht existiert, schreibe „*existiert nicht*".

Beispiel: Kommutativgesetz der Matrix-Addition: Lösung: $A+B=B+A \quad m=p;n=q$

4.1 Assoziativgesetz der Matrix-Addition $(A+B)+C=A+(B+C) \quad m=p;n=q$

4.2 Neutrales Element der Matrix-Addition $A+O=A$

4.3 Distributivgesetz der M.- Multiplikation und -addition $C\cdot(A+B)=C\cdot A+C\cdot B \quad m=p;n=q$

4.5 M.- Multiplikation und Determinanten $det(A\cdot B)=det\,A\cdot det\,B=det\,B\cdot det\,A=det(B\cdot A)$
$n=m=p=q$

4.6 Kommutativgesetz der Matrizenmultiplikation *existiert nicht*

Aufgabe 5:

5.1 Erkläre die Bedeutung der Aussage: „Eine Matrix ist invertierbar." Gib auch die Bedingungen für die Invertierbarkeit einer Matrix an.

Eine Matrix A ist invertierbar, wenn es eine Matrix $A^{-1}\,gibt,$ so dass gilt: $A\cdot A^{-1}=E$
(E ist die passende Einheitsmatrix). A muss quadratisch sein und $det\,A\neq0$

5.2 Gib eine Beispiel für eine 4x4-Diagonalmatrix an.z.B.: $\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}\mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\\mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-0{,}5} & \mathbf{0}\\\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{5}\end{pmatrix}$

<u>Aufgabe 6:</u> Berechne, falls möglich, die Inverse der folgenden Matrizen mit einer Methode deiner Wahl. Gib eine Begründung an, falls die Berechnung nicht möglich ist.

<u>**6.1**</u> Mit Gauß-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3/2 & -1/2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1{,}5 & -1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1{,}5 & -1/2 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3/4 & -1/4 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 3/2 & -1/2 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3/4 & -1/4 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 3/2 & -1/2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3/4 & -1/4 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 2/3 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3/4 & -1/4 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 2/3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -3/4 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 2/3 & 0 \end{array}\right)$$ Damit ist $$\boldsymbol{M^{-1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{-1} \\ -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \\ -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} & \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

<u>**6.2**</u> $$M = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -3 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & -4 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 2 & 0 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Berechnung nicht möglich, da M nicht quadratisch ist.

<u>Aufgabe 7:</u> Die folgenden Matrizen sollen als Abbildungen verstanden werden. Falls es sich um die Matrix einer affine Abbildung handelt, gib an was die Matrix geometrisch bewirkt. Gib eine Begründung an, falls es sich nicht um die Matrix einer affine Abbildung handelt.

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Lösung: Spiegelung an y-Achse

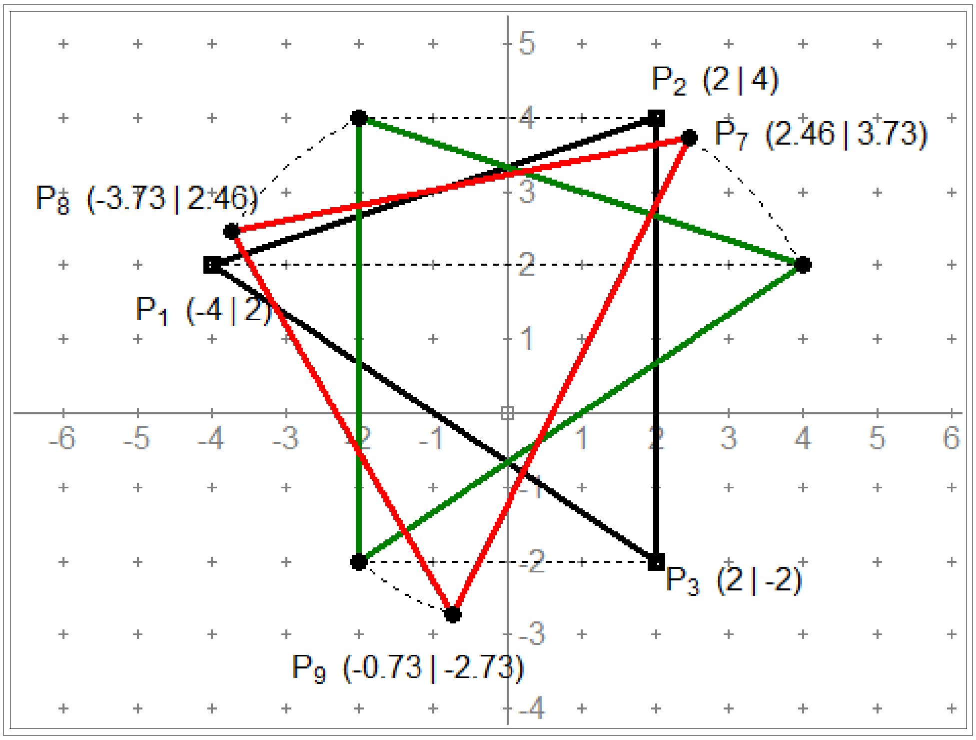
<u>**7.1**</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ Spiegelung x-Achse

<u>**7.2**</u> $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ keine affine Abbildung, weil $det\, B = -1 \cdot 0 - (-1) \cdot 0 = 0$

7.3 $C=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ Punktspiegelung Ursprung oder Drehung um $\pm 180°$.

7.4 $D=\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix}$ Drehung um Winkel α um Ursprung

Aufgabe 8: Gegeben ist ein Dreieck mit den Koordinaten $A(-4|2), B(2|4), C(2|-2)$. Das Dreieck wird zunächst an der y-Achse gespiegelt, anschließend um 30° gegen den Uhrzeigersinn um den Koordinatenursprung gedreht. Berechne die neuen Koordinaten des Dreiecks.



$M_1=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ bewirkt die Spiegelung an der y-Achse.

$M_2=\begin{pmatrix}\cos(30°) & -\sin(30°)\\ \sin(30°) & \cos(30°)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$ bewirkt die Drehung um 30° gegen den Uhrzeigersinn.

Die Ausführung beider Abbildungen hintereinander wird durch $M_{12}=M_2\cdot M_1=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$ bewirkt.

Seien $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ die Ortsvektoren von A, B und C. Damit ist

$\vec{a}'=M_{12}\cdot\vec{a}=\begin{pmatrix}-1+2\sqrt{3}\\ 2+\sqrt{3}\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}2{,}46\\ 3{,}73\end{pmatrix}$, $\vec{b}'=M_{12}\cdot\vec{b}=\begin{pmatrix}-2-\sqrt{3}\\ -1+2\sqrt{3}\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}-3{,}73\\ 2{,}46\end{pmatrix}$ und

$\vec{c}'=M_{12}\cdot\vec{c}=\begin{pmatrix}1-\sqrt{3}\\ -1-\sqrt{3}\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}-0{,}73\\ -2{,}73\end{pmatrix}$ **A: Das neue Dreieck hat die Koordinaten**

$\boldsymbol{A'(2{,}46|3{,}73), B'(-3{,}73|2{,}46)}$ **und** $\boldsymbol{C'(-0{,}73|-2{,}73)}$.

Mathematik LK 12 M1, 4. Kursarbeit – Matrizen und Stochastik – Lösung 11.06.2014

Aufgabe 9:

9.1 Beschreibe das Ziegenproblem und erkläre die Lösung.

Problembeschreibung:
In einer Gameshow sind hinter drei Türe zwei Ziegen (Nieten) und ein Auto (Gewinn). Ein Teilnehmer wählt eine Tür aus. Der Showmaster, der weiß, hinter welcher Tür das Auto ist, öffnet anschließend eine der beiden anderen Türen und zeigt dem Teilnehmer eine Ziege. Der Teilnehmer muss entscheiden, ob er bei seiner Wahl bleibt oder auf das andere noch nicht geöffnete Tor wechselt. Die Frage ist, ob sich seine Chancen verändern, wenn er wechselt.
Lösung:
Es ist günstiger zu wechseln, weil: Die Wahrscheinlichkeit, dass der Teilnehmer sofort die richtige Tür gewählt hat, liegt bei 1/3. Das Öffnen einer Tür ändert diese Wahrscheinlichkeit nicht. Die Wahrscheinlichkeit, dass das Auto hinter einer der beiden anderen Türen ist, liegt bei 2/3. Da es nicht hinter der Tür mit der gezeigten Ziege ist, muss es mit 2/3 Wahrscheinlichkeit hinter der ungeöffneten, zuvor nicht ausgewählten Tür liegen.

9.2 Erkläre mit Hilfe einer Rechnung die Aussage bei der Lottowerbung: „Gewinnchance 1: 140 Millionen".

Es gibt $49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44$ Möglichkeiten, aus 6 aus 49 Kugeln auszuwählen. Das ist die Gesamtzahl der Fälle.

Dabei ist allerdings die Reihenfolge berücksichtigt, d.h. unterschiedliche Positionen der gezogenen Kugeln werden extra gezählt. Da diese Reihenfolge beim Lotto keine Rolle spielt, gehören alle Permutationen von 6 Kugeln zu den günstigen Fällen, also $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6!$

Damit ist die Wahrscheinlichkeit für sechs Richtige im Lotto

$$P(6\,Richtige) = \frac{6!}{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44} = \frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{13.983.816}$$

Den Jackpot gibt es aber, wenn auch die Superzahl getroffen wird (Endziffer der Lottoscheinnummer). Daher muss die Wahrscheinlichkeit 1 zu 14 Millionen noch mit der Wahrscheinlichkeit 1/10 für das Treffen der Superzahl multipliziert werden.

Aufgabe 10: Berechne die Wahrscheinlichkeit, beim Ziehen von fünf Karten aus einem Pokerspiel (52 Karten) vier Asse zu ziehen.

Es gibt insgesamt $\binom{52}{5}$ Möglichkeiten, 5 aus 52 Karten zu ziehen.
Werden vier Asse gezogen, bleiben noch 48 Möglichkeiten für die verbleibende, beliebige Karte.

Damit ist $\boldsymbol{P(4\,Asse)} = \frac{48}{\binom{52}{5}} = \frac{1}{54145} = \mathbf{0{,}00184\,\%}$

A: Die Wahrscheinlichkeit beträgt 0,00184 %.

Mathematik LK 12 M1, 4. Kursarbeit – Matrizen und Stochastik – Lösung 11.06.2014

<u>Aufgabe 11:</u> Berechne die Wahrscheinlichkeit beim Würfeln mit drei 6er-Würfeln mindestens 17 Augen in Summe zu würfeln.

Anzahl der aller Fälle: $6^3=216$

Es gibt vier günstige Fälle: 566 656 665 666

Damit ist $P(17+)=\frac{4}{216}=\frac{1}{54}=1{,}8519\,\%$

A: Die Wahrscheinlichkeit beträgt 1,85 %.

<u>Aufgabe 12:</u> Ein Schüler muss in einer Klausur zehn von 13 Aufgaben lösen. Berechne die Anzahl der Auswahlmöglichkeiten,

<u>12.1</u> insgesamt.

$$\binom{13}{10}=286$$

A: Es gibt 286 Möglichkeiten, 10 aus 13 Aufgaben auszuwählen.

<u>12.2</u> wenn er die ersten beiden Aufgaben lösen muss.

Die ersten beiden Aufgaben stehen fest, es bleiben also noch 8 aus 11 Aufgaben: $\binom{11}{8}=165$

A: Es gibt 165 Möglichkeiten, wenn er die ersten beiden Aufgaben auswählen muss.

<u>12.3</u> wenn er genau eine der ersten beiden Aufgaben lösen muss.

Es gibt $\binom{2}{1}=2$ Möglichkeiten, eine der beiden ersten Aufgaben auszuwählen (die erste oder die zweite Aufgabe). Die restlichen 9 Aufgaben müssen aus den 11 Aufgaben 2-13 ausgewählt werden, also $\binom{11}{9}$. Damit gibt es insgesamt $\binom{2}{1}\cdot\binom{11}{9}=110$ Möglichkeiten.

A: Es gibt 110 Möglichkeiten, wenn er genau einer der ersten beiden Aufgaben auswählen muss.

<u>12.4</u> wenn er genau 3 der ersten 5 Aufgaben lösen muss.

$\binom{5}{3}\cdot\binom{8}{7}=80$ **A: Es gibt 80 Möglichkeiten, wenn er 3 der ersten 5 Aufgaben auswählen muss.**

<u>12.5</u> wenn er mindestens 3 der ersten 5 Aufgaben lösen muss.

$$\binom{5}{3}\cdot\binom{8}{7}+\binom{5}{4}\cdot\binom{8}{6}+\binom{5}{5}\cdot\binom{8}{5}=276$$

A: Es gibt 276 Möglichkeiten, wenn er mindestens 3 der ersten 5 Aufgaben auswählen muss.