Mathematik LK 12 M1, 2. KA – Integr., Beweise, Vektorrechnung – Lösung 28.11.2013

Aufgabe 1: Berechne die Lösungsmenge der Gleichung $2x^2-7{,}5=-2x$

$2x^2-7{,}5=-2x \quad \mid +2x$ $\Leftrightarrow 2x^2+2x-7{,}5=0 \quad \mid :2$ $\Leftrightarrow x^2+x-3{,}75=0$ p-q-Formel:	$x_{1/2}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+3{,}75}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{4}=-\frac{1}{2}\pm 2$ $\Rightarrow x_1=-2{,}5 \ ; \ x_2=1{,}5 \qquad \boldsymbol{L=\{-2{,}5;1{,}5\}}$

Aufgabe 2: Beweise mit Hilfe der vollständigen Induktion die folgenden Aussagen.

2.1 $\sum_{k=2}^{n}\frac{2k-3}{3^k}=\frac{1}{3}-\frac{n}{3^n} \quad \forall n\in\mathbb{N}; n\geq 2$

Induktionsanfang $n=2$: linke Seite: $\sum_{k=2}^{2}\frac{2k-3}{3^k}=\frac{2\cdot 2-3}{3^2}=\frac{1}{9}$ rechte Seite: $\frac{1}{3}-\frac{2}{3^2}=\frac{1}{3}-\frac{2}{9}=-\frac{1}{9}$

Induktionsschritt $n\rightarrow n+1$: $\sum_{k=2}^{n+1}\frac{2k-3}{3^k}=\sum_{k=2}^{n}\frac{2k-3}{3^k}+\frac{2\cdot(n+1)-3}{3^{n+1}}=\underbrace{\frac{1}{3}-\frac{n}{3^n}}_{\text{Behauptung}}+\frac{2\cdot(n+1)-3}{3^{n+1}}$

$$=\frac{1}{3}-\frac{3n}{3\cdot 3^n}+\frac{2n+2-3}{3^{n+1}}=\frac{1}{3}-\left(\frac{3n}{3^{n+1}}-\frac{2n-1}{3^{n+1}}\right)=\frac{1}{3}-\frac{3n-2n+1}{3^{n+1}}=\frac{1}{3}-\frac{n+1}{3^{n+1}}$$ **q.e.d.**

2.2 $\sum_{k=1}^{n}a_k-\prod_{k=1}^{n}a_k\leq n-1 \quad \forall n\in\mathbb{N}; a_k\in]0;1[\subset\mathbb{R}$

Induktionsanfang $n=0$: $\sum_{k=1}^{1}a_k-\prod_{k=1}^{1}a_k=a_1-a_1=0\leq 0=1-1$ o.k.

Induktionsschritt $n\rightarrow n+1$: $\sum_{k=1}^{n+1}a_k-\prod_{k=1}^{n+1}a_k=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)+a_{n+1}-\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)\cdot a_{n+1}$ a_{n+1} ausklammern:

$$=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)+a_{n+1}\cdot\left(1-\prod_{k=1}^{n}a_k\right)\underbrace{<}_{\text{weil } a_{n+1}<1}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)+1\cdot\left(1-\prod_{k=1}^{n}a_k\right)=\underbrace{\sum_{k=1}^{n}a_k-\prod_{k=1}^{n}a_k}_{\text{Behauptung}}+1\leq n-1+1=n$$ q.e.d.

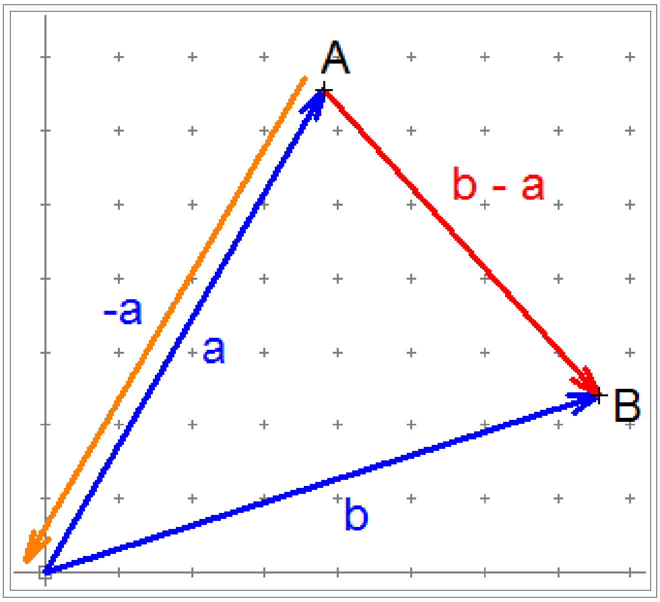
Aufgabe 3: Berechne die folgenden Integrale mit Hilfe der Substitution. Verwende, falls angeben, die vorgegebene Substitution.

3.1 $\int x\cdot\ln(x^2)\,dx$ Substitution: $z=x^2$ $\frac{dz}{dx}=2x \Leftrightarrow dx=\frac{dz}{2x}$	$\int x\cdot\ln(z)\frac{1}{2x}dz=\frac{1}{2}\int\ln(z)\,dz=\frac{1}{2}(z\ln(z)-z)$ Rücksubstitution: $x=\pm\sqrt{z}$ $\int x\cdot\ln(x^2)\,dx=\boldsymbol{\pm\frac{\sqrt{z}}{2}\left(\ln(\sqrt{z})-1\right)}$
3.2 $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ Substitution: $x=\sin(z)$ $\frac{dx}{dz}=\cos(z)\Leftrightarrow dx=\cos(z)\,dz$ Grenzen:	$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(z)}}\cdot\cos(z)\,dz$

$\sin(\bar{a})=0\Rightarrow\bar{a}=0 \quad \sin(\bar{b})=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\bar{b}=\frac{\pi}{3}$	$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos(z)}\cdot\cos(z)\,dz=\int_0^{\frac{\pi}{3}}1\,dz=[z]_0^{\pi/3}=\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$
3.3 $\int x^2\cdot\sin(x^3)\,dx$ Substitution: $z=x^3$ $\frac{dz}{dx}=3x^2 \Leftrightarrow dx=\frac{dz}{3x^2}$	$\frac{1}{3}\int x^2\sin(z)\frac{1}{x^2}\,dz=\frac{1}{3}\int\sin(z)\,dz=-\frac{1}{3}\cos(z)$ Rücksubstitution: $x=\sqrt[3]{z}$ $\int x^2\cdot\sin(x^3)\,dx=-\frac{1}{3}\cos(\sqrt[3]{z})$
3.4 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{\pi}{24}}\cos(4x-2)\,dx$ Substitution: $z=4x-2 \Leftrightarrow x=\frac{z+2}{4}$ $\frac{dz}{dx}=4\Leftrightarrow dx=\frac{1}{4}dz$	Grenzen: $\bar{a}=\frac{4\cdot1}{2}-2=0$ $\bar{b}=4\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{24}\right)-2=2+\frac{\pi}{6}-2=\frac{\pi}{6}$ $\frac{1}{4}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos(z)\,dz=\frac{1}{4}[\sin(z)]_0^{\pi/6}=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}-0\right)=\boldsymbol{\frac{1}{8}}$

Aufgabe 4: Erkläre mit Worten und mit Hilfe einer Skizze, warum...

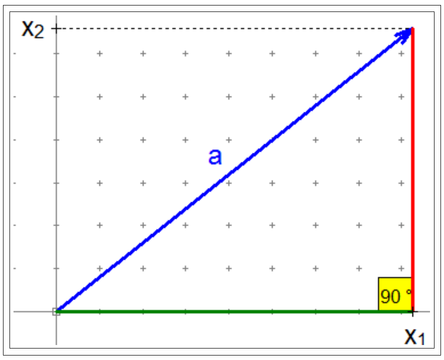
4.1 ...der Verbindungsvektor zweier Punkte die Differenz der Ortsvektoren der beiden Punkte ist.



Ein Vektor kann als Verschiebungsabbildung eines Punktes betrachtet werden. Der Gegenvektor macht dann diese Verschiebung rückgängig. Ein Ortsvektor ist die Verschiebung vom Ursprung auf den entsprechenden Punkt. Der Verbindungsvektor ist nun eine Verschiebung von A nach B. Dafür verschiebt man A nun zunächst mit $-\vec{a}$ auf den Ursprung und anschließend mit $\vec{b}$ auf B. Die Vektoraddition kennzeichnet zwei hintereinander ausgeführte Verschiebungen. Also gilt $\vec{AB}=-\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}-\vec{a}$

Bemerkung: Der Gegenvektor $-\vec{a}$ wurde zur besseren Visualisierung neben $\vec{a}$ gezeichnet, liegt aber natürlich auf $\vec{a}$. Aus technischen Gründen fehlen außerdem die Vektorpfeile in der Skizze.

4.2 ...das Quadrat des Betrags eines Vektors gleich der Summe der Quadrate seiner Koordinaten ist.



Die Koordinaten eines Ortsvektor lassen sich als Verbindungslinien auf den Koordinatenachsen zeichnen. Diese bilden im zweidimensionalen ein rechtwinkliges Dreieck und mit dem Satz des Pythagoras gilt für einen Vektor $\vec{a}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$:

$|\vec{a}|^2=x_1^2+x_2^2$. Auch für höherdimensionale Vektoren stehen liegen alle Verbindungslinien auf den Koordinatenachsen und stehen senkrecht aufeinander, so dass der verallgemeinerte Satz des Pythagoras angewendet werden kann.

<u>**Aufgabe 5:**</u> Schreibe die Terme ins Heft und setze die Klammern so, dass der Term ein gültiger Ausdruck ist, falls möglich. Schreibe hinter den Term, ob das Ergebnis ein Vektor oder ein Skalar ist. Falls der Term auch durch Klammersetzung keinen gültigen Ausdruck bilden kann, schreibe „ungültig“ hinter den Term.
Schreibweise: $\cdot$: Normale Multiplikation mit Zahlen oder skalare Multiplikation;
$+\ -$: Normale Addition oder Vektoraddition; $*$: Skalarmultiplikation; $\times$: Kreuzprodukt
(Diese Schreibweise für das Skalarprodukt gilt nur für diese Aufgabe).

Hier gibt es meist mehrere Lösungen. Angeben sind dann hier nur Beispiele.

<u>**5.1**</u> $\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{w}=ungültig$ <u>**5.2**</u> $a\cdot b\cdot c\cdot\vec{u}\cdot\vec{v}=ungültig$

<u>**5.3**</u> $(((a\cdot\vec{u})\times\vec{v})+\vec{w})*\vec{z}=Skalar$ <u>**5.4**</u> $\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{a}+\vec{b}=ungültig$

<u>**5.5**</u> $((\vec{a}\times\vec{b}\times\vec{c})\cdot u)\times\vec{d}=Vektor$ <u>**5.6**</u> $((\frac{\vec{u}}{a\cdot b})*(\vec{v}\times\vec{w}))\cdot c=Skalar$

<u>**Aufgabe 6:**</u> Berechne

<u>**6.1**</u> $$\begin{pmatrix}-3\\2\\0{,}5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\-6\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3-2\\2-(-6)\\0{,}5-(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{-5}\\\mathbf{8}\\\mathbf{2{,}5}\end{pmatrix}$$

<u>**6.2**</u> $$\begin{pmatrix}-3\\2\\0{,}5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-6\\-2\end{pmatrix}=-3\cdot2+2\cdot(-6)+0{,}5\cdot(-2)=-6-12-1=\mathbf{-19}$$

<u>**6.3**</u> $$\left|\begin{pmatrix}-3\\2\\0{,}5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\-6\\-2\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}2\cdot(-2)-0{,}5\cdot(-6)\\0{,}5\cdot2-(-3)\cdot(-2)\\-3\cdot(-6)-2\cdot2\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}-4+3\\1-5\\18-4\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}-1\\-5\\14\end{pmatrix}\right|$$
$$=\sqrt{(-1)^2+(-5)^2+14^2}=\sqrt{1+25+196}=\mathbf{\sqrt{222}}$$

<u>**Aufgabe 7:**</u> Untersuche, ob das Dreieck ABC gleichseitig, gleichschenklig oder unregelmäßig ist.
$A(-1|-2|2)$, $B(3|2|1)$, $C(4|0|1)$

Zwei Lösungsmöglichkeiten: 1.) Über die Seitenlängen; 2.) Über die Winkel (nicht in dieser Musterlösung)

1.)

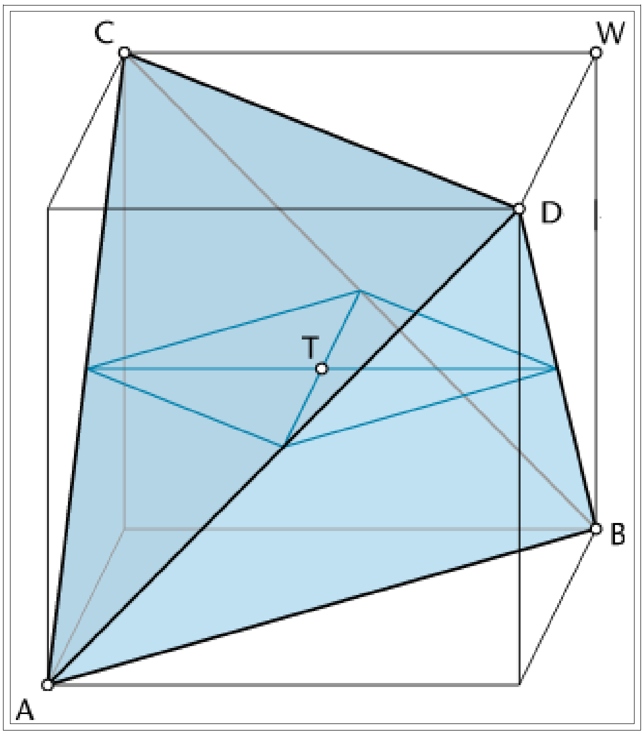
$$\overline{AB}=|\vec{b}-\vec{a}|=\left|\begin{pmatrix}3+1\\2+2\\1-2\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}4\\4\\-1\end{pmatrix}\right|=\sqrt{4^2+4^2+(-1)^2}=\sqrt{33}$$

$$\overline{BC}=|\vec{c}-\vec{b}|=\left|\begin{pmatrix}4-3\\0-2\\1-1\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}\right|=\sqrt{1^2+(-2)^2+0^2}=\sqrt{5}$$

$$\overline{AC}=|\vec{c}-\vec{a}|=\left|\begin{pmatrix}4+1\\0+2\\1-2\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}5\\2\\-1\end{pmatrix}\right|=\sqrt{5^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{30}$$

Die Seiten sind unterschiedlich lang, also ist das Dreieck unregelmäßig. (Es ist auch nicht rechtwinklig, denn der Satz der Pythagoras gilt nicht: $33\neq5+30$)

Mathematik LK 12 M1, 2. KA – Integr., Beweise, Vektorrechnung – Lösung 28.11.2013



Aufgabe 8: Ein regelmäßiges Tetraeder ist einer der fünf platonischen Körper, d.h. ein Körper, der durch regelmäßige Vielecke begrenzt wird. Beim Tetraeder sind alle Flächen gleichseitige Dreiecke.
Anders ausgedrückt: Ein Tetraeder ist eine regelmäßige Pyramide mit einem gleichseitigen Dreieck als Grundfläche und die Mantelfläche besteht ebenfalls aus gleichseitigen Dreiecken.
Rechts ist ein Tetraeder abgebildet, dessen Ecken die Punkte
$A(12|0|0)$,
$B(0|12|0)$,
$C(0|0|12)$ und
$D(12|12|12)$ sind.

8.1 Gib die Koordinaten des Punktes W an.

$$\boldsymbol{W(0|12|12)}$$

8.2 Berechne das Volumen des umhüllenden Würfels.
Alle Kanten sind gleich lang, also genügt die Länge einer Kante: $\overline{CW}=|\vec{w}-\vec{c}|=\left|\begin{pmatrix}0-0\\12-0\\12-12\end{pmatrix}\right|=\sqrt{12^2+0^2+0^2}=12$

$$V=\overline{CW}^3=(12\,L.E.)^3=\mathbf{1728}\,V.E.$$

8.3 Der Mittelpunkt von Tetraeder und Würfel ist der Punkt $T(6|6|6)$. Zeige, dass der Winkel zwischen den beiden Strecken $\overline{TC}$ und $\overline{TA}$ den Wert 109,47° hat.

Bemerkung: Dieser Winkel heißt Tetraederwinkel und hat eine besondere Bedeutung in der Chemie. Der Winkel ist immer gleich, egal welche Ecken des Tetraeders man wählt.

$$\vec{TC}=\vec{c}-\vec{t}=\begin{pmatrix}0-6\\0-6\\12-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\-6\\6\end{pmatrix}\qquad|\vec{TC}|=\sqrt{(-6)^2+(-6)^2+6^2}=\sqrt{3\cdot 6^2}=6\cdot\sqrt{3}$$

$$\vec{TA}=\vec{a}-\vec{t}=\begin{pmatrix}12-6\\0-6\\0-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-6\\-6\end{pmatrix}\qquad|\vec{TA}|=\sqrt{6^2+(-6)^2+(-6)^2}=\sqrt{3\cdot 6^2}=6\cdot\sqrt{3}$$

$$\vec{TA}\cdot\vec{TC}=(-6)\cdot 6+(-6)\cdot(-6)+6\cdot(-6)=-36+36-36=-36$$

$$\cos(\phi)=\frac{\vec{TA}\cdot\vec{TC}}{|\vec{TC}|\cdot|\vec{TC}|}=\frac{-36}{6\cdot\sqrt{3}\cdot 6\cdot\sqrt{3}}=\frac{-36}{36\cdot 3}=-\frac{1}{3}\qquad\Rightarrow\phi=\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\approx\mathbf{109{,}4712\,°}$$

8.4 Berechne das Volumen des Tetraeders. Zur Erinnerung: $V_{Pyramide}=\frac{1}{3}G\cdot h$

Auch hier gibt es mehrere Lösungsmöglichkeiten. Am schnellsten:

$$V_{Tetraeder}=V_{Würfel}-4\cdot V_{Restpyramide}=V_{Würfel}-4\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}12\cdot 12\right)\cdot 12=V_{Würfel}-\frac{2}{3}V_{Würfel}=\frac{1}{3}V_{Würfel}=\mathbf{576}\,V.E.$$