Mathematik LK 12 M1, 1. Kursarbeit – Integration – Lösung 01.10.2013

Aufgabe 1:

1.1 Erkläre mit Hilfe der Definition des Integrals den Unterschied zwischen dem Integral einer Funktion und dem Flächeninhalt der Fläche zwischen dem Graphen der Funktion und der x-Achse.

Def.: Integral

Sei f eine im Intervall $I=[a;b]$ stetige Funktion. Es sei $S_n=h\cdot\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$ eine beliebige Zerlegungssumme mit $h=\frac{b-a}{n}, n\in\mathbb{N}$. Dann heißt $\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty} S_n$ das Integral von f(x) dx von a bis b.

Das Integral ist die (unendliche) Summe aller Funktionswerte im Integral, ungeachtet des Vorzeichens. Die Fläche ist die (unendliche) Summe aller Beträge der Funktionswerte.

1.2 Gib die Definition für die Integralfunktion an.

Sei die Funktion f in einem Intervall I stetig und $a\in I.$ Dann heißt

J_a mit $J_a(x)=\int_a^x f(t)\,dt \quad \forall x\in I.$ Integralfunktion von f zur unteren Grenze a.

Satz: Sei die Funktion f in einem Intervall I stetig und $a, x\in I.$ Dann gilt:

$$J_a(x)=\int_a^x f(t)\,dt=\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^a f(t)\,dt=J_0(x)-J_0(a)$$

1.3 Schreibe die Aussagen vom Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung mathematisch korrekt auf.

Teil 1: Sei die Funktion $f: t\to f(t)$ in einem Intervall I stetig und $a\in I$. Dann ist die Integralfunktion J_a mit $J_a(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ differenzierbar und es gilt: $J_a'(x)=f(x) \quad \forall x\in I$

Die Integralfunktion J_a von f ist also eine Stammfunktion von f.

Teil 2: Newton-Leibniz-Formel

Sei die Funktion $f: x\to f(x)$ in einem Intervall $I=[a;b]\subseteq\mathbb{R}$ stetig und F eine Stammfunktion von f. Es gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$$

1.4. Berechne

1.4.1 $\int_1^2 \frac{1}{2x^2}dx=\left[-\frac{1}{2x}\right]_1^2$ $=-\frac{1}{2\cdot 2^2}-\left(-\frac{1}{2\cdot 1^2}\right)$ $=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\mathbf{\frac{1}{4}}$	**1.4.2** $\int_0^{\pi}\sin(x)\,dx=[-\cos(x)]_0^{\pi}$ $=-\cos(\pi)-(-\cos(0))$ $=-(-1)-(-1)=1+1=\mathbf{2}$	**1.4.3** $\int_{-4}^{-2} e^{\ln(x)}dx=\int_{-4}^{-2} x\,dx$ $=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-4}^{-2}$ $=\frac{1}{2}\cdot(-2)^2-\frac{1}{2}\cdot(-4)^2=2-8=\mathbf{-6}$

1.5. Berechne den Flächeninhalt der Fläche zwischen dem Graphen der Funktion f und der x-Achse im Intervall $[a;b]$.

1.5.1 $f(x)=\cos(x)\ ;\ a=-\pi\ ;\ b=\pi$

Nullstellen im Intervall: $x_1=-\frac{\pi}{2}\ ;\ x_2=\frac{\pi}{2}$

$$I_1=\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}\cos(x)\,dx=[\sin(x)]_{-\pi}^{-\pi/2}=\sin(-\pi/2)-\sin(-\pi)=-1-0=-1 \qquad A_1=|I_1|=1$$

$$I_2=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)\,dx=[\sin(x)]_{\pi/2}^{-\pi/2}=\sin(\pi/2)-\sin(-\pi/2)=1-(-1)=2 \qquad A_2=|I_2|=2$$

$$I_3=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos(x)\,dx=[\sin(x)]_{\pi/2}^{\pi}=\sin(\pi/2)-\sin(\pi)=1-0=1 \qquad A_3=|I_3|=1$$

$$\boldsymbol{A}=A_1+A_2+A_3=\mathbf{4}$$

1.5.2 $f(x)=(x-2)(x+1)(x-4)\ ;\ a=1{,}5\ ;\ b=4{,}5$

Nullstellen insgesamt: $x_1=2\ ;\ x_2=-1\ ;\ x_3=4$
Nullstellen im Intervall: $x_1=2\ ;\ x_3=4$
Ausmultiplizieren: $f(x)=(x-2)(x+1)(x-4)=x^3-5x^2+2x+8$

$$I_1=\int_{1,5}^{2}(x^3-5x^2+2x+8)\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{5}{3}x^3+x^2+8x\right]_{1,5}^{2}=\left(4-\frac{40}{3}+4+16\right)-\left(\frac{81}{64}-\frac{135}{24}+\frac{9}{4}+12\right)$$
$$=\frac{32}{3}-\frac{633}{64}=\frac{2048}{192}-\frac{1899}{192}=\frac{149}{192}\approx 0{,}7760 \qquad A_1=|I_1|=\frac{149}{192}$$

$$I_2=\int_{2}^{4}(x^3-5x^2+2x+8)\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{5}{3}x^3+x^2+8x\right]_{2}^{4}=\left(64-\frac{320}{3}+16+32\right)-\frac{32}{3}$$
$$=\frac{16}{3}-\frac{32}{3}=-\frac{16}{3} \qquad A_2=|I_2|=\frac{16}{3}=\frac{1024}{192}$$

$$I_3=\int_4^{4,5}(x^3-5x^2+2x+8)\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{5}{3}x^3+x^2+8x\right]_4^{4,5}=\left(\frac{6561}{64}-\frac{9720}{64}+\frac{1296}{64}+\frac{2304}{64}\right)-\frac{16}{3}$$
$$=\frac{1323}{64}-\frac{1024}{192}=\frac{299}{192}\approx 1,5573 \qquad A_3=|I_3|=\frac{299}{192}$$

$$\boldsymbol{A}=A_1+A_2+A_3=\frac{149}{192}+\frac{1024}{192}+\frac{299}{192}=\frac{1472}{192}=\frac{\mathbf{23}}{\mathbf{3}}=7,\overline{6}$$

Aufgabe 2: Berechne den Flächeninhalt der eingeschlossenen Fläche zwischen den Graphen der Funktionen $f(x)=x^3-6x^2+9x$ und $g(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x$

Bildung der Differenzfunktion: $h(x)=f(x)-g(x)=x^3-5,5x^2+7x$

Nullstellen der Differenzfunktion: $x_n^3-5,5x_n^2+7x_n=0 \quad | \ T$

$\Leftrightarrow x_n(x_n^2-5,5x_n+7)=0 \qquad \Rightarrow x_1=0$

Betrachte Klammer: $x_n^2-5,5x_n+7=0$ p-q-Formel: $x_{2/3}=\frac{11}{4}\pm\sqrt{\frac{121}{16}-\frac{112}{16}}=\frac{11}{4}\pm\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{11}{4}\pm\frac{3}{4}$

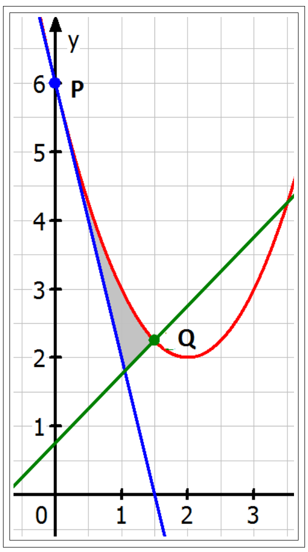
$\Rightarrow x_2=\frac{8}{4}=2 \ ; \ x_3=\frac{14}{4}=3,5$

$$I_1=\int_0^{2}(x^3-5,5x^2+7x)\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{11}{6}x^3+\frac{7}{2}x^2\right]_0^{2}=\left(4-\frac{44}{3}+14\right)-(0-0+0)$$
$$=\frac{10}{3} \qquad A_1=|I_1|=\frac{10}{3}$$

$$I_2=\int_2^{3,5}(x^3-5,5x^2+7x)\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{11}{6}x^3+\frac{7}{2}x^2\right]_2^{3,5}=\left(\frac{2401}{64}-\frac{3773}{48}+\frac{343}{8}\right)-\frac{10}{3}$$
$$=\frac{343}{192}-\frac{640}{192}=-\frac{297}{192}=-\frac{99}{64}=-1,546875 \qquad A_2=|I_2|=\frac{99}{64}$$

$$\boldsymbol{A}=A_1+A_2=\frac{640}{192}+\frac{297}{192}=\frac{\mathbf{937}}{\mathbf{192}}\approx 4,88$$

Aufgabe 3: Berechne den Flächeninhalt der eingeschlossenen Fläche zwischen dem Graphen der Funktion $f(x)=x^2-4x+6$, der Tangenten von f im Punkt $P(0|6)$ und der Normalen von f im Punkt $Q(1,5|2,25)$.



1. Ableitung: $f'(x)=2x-4$

Tangentensteigung im Punkt P: $m_1=f'(0)=-4$

Tangentengleichung: $g(x)=m_1x+n_1$ m_1 und P einsetzen:

$6=-4\cdot 0+n_1$ Damit ist: $g(x)=-4x+6$

Normalensteigung im Punkt Q: $-\frac{1}{m_2}=f'(1{,}5)=2\cdot 1{,}5-4=3-4=-1 \quad \Rightarrow m_2=1$

Normalengleichung: $h(x)=m_2 x+n_2$ m_2 und Q einsetzen:

$2{,}25=1\cdot 1{,}5+n_2 \Leftrightarrow n_2=0{,}75$ Damit ist $h(x)=x+0{,}75$

Berechnung der Schnittpunkte:

$f(x)$ und $g(x)$: $x_s^2-4x_s+6=-4x_s+6 \quad |+4x_s-6 \quad \Leftrightarrow x_s^2=0 \Leftrightarrow x_1=0$

$g(x)$ und $h(x)$: $-4x_2+6=x_2+0{,}75 \quad | -x_2-6 \quad \Leftrightarrow -5x_s=-5{,}25 \quad | :(-5)$
$x_2=\frac{21}{4}\cdot\frac{1}{5}=\frac{21}{20}=1{,}05$

$f(x)$ und $h(x)$: $x_s^2-4x_s+6=x_s+0{,}75 \quad |-x_s-0{,}75 \quad \Leftrightarrow x_s^2-5x_s+5{,}25=0$ p-q-Formel:
$x_{3/4}=2{,}5\pm\sqrt{6{,}25-5{,}25}=2{,}5\pm 1 \Rightarrow x_3=1{,}5 \;;\; x_4=3{,}5$

Da die Fläche durch x_3 begrenzt wird, ist wird x_4 für die Aufgabe nicht benötigt.

Aufteilung der Fläche: Im Intervall $[x_1; x_2]$ Fläche zwischen f(x) und g(x) und im Intervall $[x_2; x_3]$ Fläche zwischen f(x) und h(x).

$$f(x)-g(x)=x^2-4x+6-(4x+6)=x^2$$

$$I_1=\int_0^{1,05} x^2\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{1,05}=\frac{1}{3}\cdot\frac{9261}{8000}-0=\frac{3087}{8000}=0{,}385875 \qquad A_1=|I_1|=\frac{3087}{8000}$$

$$f(x)-h(x)=x^2-4x+6-(x+0{,}75)=x^2-5x+5{,}25$$

$$I_2=\int_{1,05}^{1,5}(x^2-5x+5{,}25)\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+5{,}25x\right]_{1,05}^{1,5}$$
$$=\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{27}{8}-\frac{5}{2}\cdot\frac{9}{4}+\frac{21}{4}\cdot\frac{3}{2}\right)-\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{9261}{8000}-\frac{5}{2}\cdot\frac{441}{400}+\frac{21}{4}\cdot\frac{21}{20}\right)=\left(\frac{9}{8}-\frac{45}{8}+\frac{63}{8}\right)-\left(\frac{3087}{8000}-\frac{22050}{8000}+\frac{44100}{8000}\right)$$
$$=\frac{27000}{8000}-\frac{25137}{8000}=\frac{1863}{8000}\approx 0{,}2329 \qquad A_2=|I_2|=\frac{1863}{8000}$$

$$\boldsymbol{A}=A_1+A_2=\frac{3087}{8000}+\frac{1863}{8000}=\frac{4950}{8000}=\boldsymbol{\frac{99}{160}}=0{,}61875$$

Aufgabe 4: Beweise mit Hilfe der Integralrechnung, dass für einen Zylinder mit dem Radius r der Grundfläche und der Höhe h für das Volumen $V=\pi r^2 h$ gilt.

Bilde einen Rotationskörper der Funktion $f(x)=r$ in im Intervall $[0; h]$:
$$\boldsymbol{V}=\pi\int_0^h r^2\,dx=\pi\cdot\left[r^2 x\right]_0^h=\pi\cdot(r^2\cdot h-r^2\cdot 0)=\boldsymbol{\pi r^2 h}$$ q.e.d.

<u>Aufgabe 5:</u> Gegeben sind die Funktionen $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit $f(x)=\frac{1}{x}$ und $g:\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ mit $g(x)=-\frac{1}{2}x^2+1{,}5$. Berechne das Volumen des Rotationskörpers (oder zeige, dass das Volumen unendlich groß ist), der entsteht, wenn man den Graphen von f um die y-Achse rotiert. Nach oben soll der Rotationskörper unbegrenzt sein, nach unten wird er durch den Rotationskörper um die y-Achse des Graphen von g begrenzt.

Lösungsweg: Der Schnittpunkt zwischen f und g bildet die untere Kante des Körpers. Das Volumen des Körpers ist das Volumen des Rotationskörpers von f mit der y-Koordinate des Schnittpunkts y_s als untere Grenze („glatter Boden") minus das Volumen des Rotationskörpers von g mit der unteren Grenze y_s und des y-Achsenabschnitts als obere Grenze. (Ähnlich dem gewölbten Boden einer Sektflasche). (y-Koordinate entspricht dann der x-Koordinate des Schnittpunkts der Umkehrfunktionen und der y-Achsenabschnitt wird zur Nullstelle).

Rotationskörper um die y-Achse: Bildung der Umkehrfunktionen

$$f(x)=\frac{1}{x} \Leftrightarrow y=\frac{1}{x} \quad |^{-1} \Leftrightarrow \frac{1}{y}=x \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{1}{x}$$

$$g(x)=-\frac{1}{2}x^2+1{,}5 \Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x^2+1{,}5 \Leftrightarrow y-1{,}5=-\frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow -2y+3=x^2 \Rightarrow \sqrt{-2y+3}=x \quad -$$
$$\Rightarrow g^{-1}(x)=\sqrt{-2x+3}$$

Schnittpunkt zwischen f^{-1} und g^{-1}: $\frac{1}{x_s}=\sqrt{-2x_s+3} \quad |^2 \Rightarrow \frac{1}{x_s^2}=-2x_s+3 \quad | \cdot x_s^2$

$1=x_s^2(-2x_s+3) \quad | -1 \Leftrightarrow 0=-2x_s^3+3x_s^2-1 \qquad x_s=1$ ist eine Lösung. Weitere Lösungen:

$(-2x^3+3x^2-1):(x-1)=-2x^2+x+1$ $-2x^3+2x^2$ x^2-1 x^2-x $x-1$ $x-1$ 0	$-2x^2+x+1=0 \quad | :(-2)$ $x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}=0$ $\Rightarrow x_{2/3}=\frac{1}{4}\pm\sqrt{\frac{1}{16}-\frac{1}{2}}$ Es gibt also keine weiteren Lösungen. Probe $\frac{1}{1}=\sqrt{-2\cdot 1+3}$ o.k.

Berechnung der Nullstellen von $g^{-1}(x)$

$$\sqrt{-2x_n+3}=0 \quad |^2 \Rightarrow -2x_n+3=0 \Leftrightarrow -2x_n=-3 \Leftrightarrow x_n=\frac{3}{2}=1{,}5$$

Probe: $\sqrt{-2\cdot 1{,}5+3}=0$ o.k.

$$V_1=\pi\cdot\int_1^\infty\left(\frac{1}{x}\right)^2 dx=\pi\cdot\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b=\pi\cdot\left(\left(\lim_{b\to\infty}-\frac{1}{b}\right)-\left(-\frac{1}{1}\right)\right)=\pi\cdot(0+1)=\pi$$

$$V_2 = \pi \cdot \int_1^{1,5} \sqrt{-2x+3}^2\, dx = \pi \cdot \int_1^{1,5} -2x+3\, dx = \pi \cdot \left[-\frac{2}{2}x^2+3x\right]_1^{1,5}$$
$$= \pi \cdot \left(-1,5^2+3\cdot 1,5-\left(-1^2+3\cdot 1\right)\right) = \pi \cdot (2,25-2) = \frac{\pi}{4}$$

$$\boldsymbol{V} = V_1 - V_2 = \pi - \frac{\pi}{4} = \mathbf{\frac{3}{4}\pi}$$

A: Das Volumen des Körpers beträgt $\mathbf{\frac{3}{4}\pi}$.

Aufgabe 6: Zeige mit Hilfe der partiellen Integration, dass $\int_0^{\pi} \sin^2(x) = \int_0^{\pi} \cos^2(x)$

$$\int_0^{\pi} \sin^2(x)\, dx = \int_0^{\pi} \sin(x)\sin(x)\, dx = [\sin(x)\cdot(-\cos(x))]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos(x)(-\cos(x))\, dx$$
$$= (-\sin(\pi)\cos(\pi)+\sin(0)\cos(0)) - \int_0^{\pi} -\cos^2(x)\, dx = 0 + \int_0^{\pi} \cos^2(x)\, dx \quad \text{q.e.d.}$$

Aufgabe 7: Berechne mit Hilfe der partiellen Integration

7.1 $$\int_0^{\pi} (\sin(x)\cos(x))\, dx = [\sin(x)\cdot\sin(x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos(x)\sin(x)\, dx \quad | \; + \int_0^{\pi} (\cos(x)\sin(x))\, dx$$
$$\Leftrightarrow 2\cdot \int_0^{\pi} (\sin(x)\cos(x))\, dx = [\sin^2(x)]_0^{\pi} \quad | \; :2$$
$$\Leftrightarrow \int_0^{\pi} (\sin(x)\cos(x))\, dx = \frac{1}{2}[\sin^2(x)]_0^{\pi} = \frac{1}{2}(\sin^2(\pi)-\sin^2(0)) = \mathbf{0}$$

7.2 $$\int_1^{2} x^2\cdot(1-\ln(x))\, dx = \int_1^{2} x^2 - x^2\ln(x)\, dx = \int_1^{2} x^2\, dx - \int_1^{2} (x^2\ln(x))\, dx$$

$$\int_1^{2} x^2\, dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 = \frac{1}{3}\cdot 2^3 - \frac{1}{3}\cdot 1^3 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$\int_1^{2} (\ln(x)\cdot x^2)\, dx = \left[\ln(x)\cdot\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 - \int_1^{2} (\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{3}x^3)\, dx = \left(\frac{8}{3}\cdot\ln(2)-0\right) - \left[\frac{1}{9}x^3\right]_1^2$$
$$= \frac{8}{3}\cdot\ln(2) - \left(\frac{8}{9}-\frac{1}{9}\right) = \frac{8}{3}\cdot\ln(2) - \frac{7}{9}$$

$$\int_1^{2} x^2\cdot(1-\ln(x))\, dx = \frac{7}{3} - \frac{8}{3}\cdot\ln(2) + \frac{7}{9} = \frac{28}{9} - \frac{8}{3}\cdot\ln(2) \approx \mathbf{1,2627}$$