Mathematik LK 11 M1, HÜ Nr. 2 – Vollständige Induktion – Lösung **05.11.2013**

__Aufgabe 1:__ Beweise (oder widerlege) die folgenden Behauptungen mit Hilfe der vollständigen Induktion.

__1.1__ $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

Beweis:

Induktionsanfang $n=1$: $\sum_{k=0}^{0} 2^k = 2^0 = 1 = 2-1 = 2^1 - 1 = 2^{(0+1)} - 1$ o.k.

Induktionsschritt $n \to n+1$: $\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = \sum_{k=0}^{n} 2^k + 2^{(n+1)} = 2^{(n+1)} - 1 + 2^{(n+1)} = 2 \cdot 2^{(n+1)} - 1 = 2^{(n+2)} - 1$

q.e.d.

__1.2__ $\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \leq 1 + \frac{n}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ Tipp: Überlege, wie viele Summanden abgetrennt werden, wenn man die Summe so umformt, so dass man die Behauptung einsetzten kann, und benutze dies für eine Abschätzung.

Fehler in Aufgabenstellung: Eigentlich sollte es $\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{n}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ sein.

Induktionsanfang ist noch gleich:

Induktionsanfang $n=1$: linke Seite: $\sum_{k=1}^{2^1} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ rechte Seite: $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ o.k.

Hier der Induktionsschritt, wie ursprünglich geplant:

Induktionsschritt $n \to n+1$: $\sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} + \sum_{2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{n}{2} + \sum_{2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} > 1 + \frac{n}{2} + \left(2^{n+1} - 2^n\right) \cdot \frac{1}{2^{n+1}}$

Behauptung einsetzen | Letzter Summand | ist am kleinsten | Anzahl der Restsummanden | mal letzter Summand

$= 1 + \frac{n}{2} + 2 \cdot 2^n - 2^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = 1 + \frac{n}{2} + 2^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = 1 + \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n+1}{2}$ q.e.d.

Hier der Induktionsschritt für die falsche Behauptung:

$\sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} + \sum_{2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \leq 1 + \frac{n}{2} + \sum_{2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k}$ Die Behauptung ist erfüllt, wenn auf der rechten Seite $1 + \frac{n+1}{2} = 1 + \frac{n}{2} + \frac{1}{2}$ steht. Also muss gelten $\sum_{2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \leq \frac{1}{2} \forall n \in \mathbb{N}$

Induktionsanfang $n=1$: linke Seite: $\sum_{k=2+1}^{2^2} \frac{1}{k} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$ rechte Seite: $\frac{1}{2} = \frac{6}{12}$

Ist ist die Behauptung $\sum_{2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \leq \frac{1}{2} \forall n \in \mathbb{N}$ unwahr und damit ist auch die erste Behauptung unwahr.

Mathematik LK 11 M1, HÜ Nr. 2 – Vollständige Induktion – Lösung 05.11.2013

<u>**1.3**</u> $\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{n+k}\right)=2-\frac{1}{n+1}\quad \forall n\in\mathbb{N}$ Diese Behauptung wurde bereits im Unterricht bewiesen.

Zur Durchführung des Beweises werden neben "normalen" Umformungen die Umformungsschritte ("Tricks") im Kasten unten benötigt. Diese sind allerdings <u>unsortiert</u>. Um den Beweis so zu machen, wie im Unterricht, wird jeder Umformungsschritt im Kasten einmal benötigt.
Hinweis: Natürlich müssen diese Schritte nicht benutzt werden. Jeder mathematisch schlüssige Beweise ist gültig.

Startwert der Zählvariable um 1 erniedrigen Letzten Faktor vom Produkt abtrennen Letzten Faktor vom Produkt abtrennen Zwei Brüche gleichnamig machen Zwei Brüche gleichnamig machen Zwei Brüche gleichnamig machen Zwei Brüche gleichnamig machen 3 durch 4-1 ersetzen Startwert und Endwert der Zählvariable um 1 erhöhen Behauptung einsetzen Bruch auftrennen (so wie bei $\frac{a+b}{2}=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$)

Induktionsanfang $n=1$: linke Seite: $\prod_{k=1}^{1}\left(1+\frac{1}{1+k}\right)=1+\frac{1}{1+1}=1{,}5$ rechte Seite:

$2-\frac{1}{1+1}=1{,}5$

Induktionsschritt $n\to n+1$: $\prod_{k=1}^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1+k}\right)=\left[\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{n+1+k}\right)\right]\cdot\left(1+\frac{1}{n+1+n+1}\right)$

Letzten Faktor vom Produkt abtrennen

$$=\left[\prod_{k=2}^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+k}\right)\right]\cdot\left(1+\frac{1}{2n+2}\right)=\left[\left(\prod_{k=1}^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+k}\right)\right):\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\right]\cdot\left(\frac{2n+2+1}{2n+2}\right)$$

Zählvariable im Produkt um 1 erhöhen Startwert der Zählvariable um 1 erniedrigen Brüche gleichnamig machen

$$=\left[\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{n+k}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n+n+1}\right)\right):\left(\frac{n+1+1}{n+1}\right)\right]\cdot\left(\frac{2n+3}{2n+2}\right)$$

Letzten Faktor vom Produkt abtrennen Brüche gleichnamig machen

$$=\left[\left(\left(2-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)\right):\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\right]\cdot\left(\frac{2n+3}{2n+2}\right)$$

Behauptung einsetzen

$$=\left(\frac{2n+2-1}{n+1}\right)\cdot\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)\cdot\left(\frac{n+1}{n+2}\right)\cdot\left(\frac{2n+3}{2n+2}\right)$$

2x Brüche gleichnamig machen

$$=\frac{2n+3}{n+2}=\frac{2n+4-1}{n+2}=\frac{2n+4}{n+2}-\frac{1}{n+2}=\frac{2(n+2)}{n+2}-\frac{1}{n+2}=2-\frac{1}{n+1+1}\quad \text{q.e.d.}$$

3 = 4 -1 Bruch auftrennen