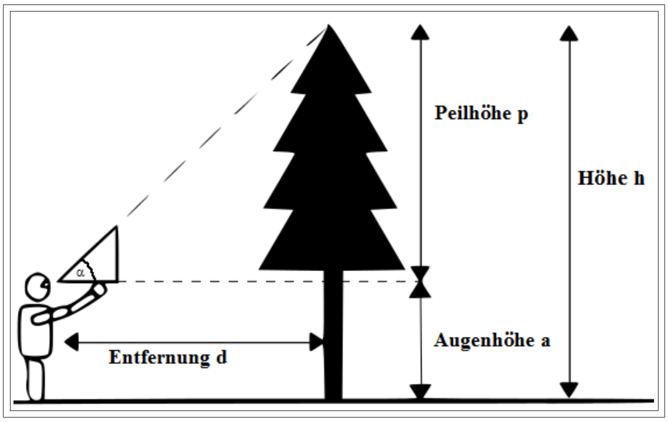
Mathematik Klasse 10a, 4. Klassenarbeit – Trigonometrie – Lösung N 05.06.2014



<u>**Aufgabe 1:**</u> Das Bild rechts zeigt die Anwendung eines Försterdreiecks. Das Dreieck ist rechtwinklig und üblicherweise gleichschenklig.

<u>**1.1**</u> Berechne die Höhe des Baumes für:

Peilwinkel $\alpha = 40°$
Entfernung $d = 20\,m$
Augenhöhe $a = 1{,}80\,m$

$$\tan(\alpha) = \frac{p}{d}$$
$$\Leftrightarrow \quad p = d \cdot \tan(\alpha) = 20\,m \cdot \tan(40°) = 16{,}78\,m$$
$$\boldsymbol{h} = p + a = 16{,}78\,m + 1{,}80\,m = \mathbf{18{,}58\,m}$$

<u>**1.2**</u> Begründe, warum für ein gleichschenkliges Försterdreieck gilt: $h = d + a$

1. Möglichkeit: In der Strahlensatzfigur sind das kleine Dreieck (Försterdreieck) und das große Dreieck mit der Tanne ähnlich zueinander, d.h. das große Dreieck muss auch gleichschenklig sein mit $p = d$.

2. Möglichkeit: Wenn das Försterdreieck gleichschenklig ist, muss $\alpha = 45°$ sein.
$$p = d \cdot \tan(45°) = d \cdot 1 = d$$

Wenn $p = d$, ist $h = p + a = d + a$

<u>**Aufgabe 2:**</u> Berechne die fehlenden Winkelgrößen und Seitenlängen für alle möglichen Dreiecke ABC mit den folgenden Angaben:

<u>**2.1**</u> $b = 5\,cm; c = 6\,cm; \beta = 35°$

$$\frac{\sin(\gamma)}{\sin(\beta)} = \frac{c}{b} \Leftrightarrow \sin(\gamma) = \frac{c}{b} \cdot \sin(\beta) = \frac{6\,cm}{5\,cm} \cdot \sin(35°) = 0{,}6882917236 \Rightarrow \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{43{,}49503565°}$$
$$\boldsymbol{\alpha} = 180° - \beta - \gamma = 180° - 35° - 43{,}49503565° = \mathbf{101{,}5049643°}$$
$$\frac{a}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = \frac{b \cdot \sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = 5\,cm \cdot \frac{\sin(101{,}5049643°)}{\sin(35°)} = 5\,cm \cdot 1{,}708416464 = \mathbf{8{,}542082318\,cm}$$

Prüfung auf 2. Dreieck: $\boldsymbol{\gamma'} = 180° - \gamma = 180° - 43{,}49503565° = \mathbf{136{,}5049643°}$

$$\boldsymbol{\alpha'} = 180° - \beta - \gamma' = 180° - 35° - 136{,}5049643° = \mathbf{8{,}495035652°}$$

$$\frac{a'}{b} = \frac{\sin(\alpha')}{\sin(\beta)} \Leftrightarrow \boldsymbol{a'} = \frac{b \cdot \sin(\alpha')}{\sin(\beta)} = 5\,cm \cdot \frac{\sin(8{,}495035652°)}{\sin(35°)} = \mathbf{1{,}287742215\,cm}$$

<u>**2.2**</u> $a = 8\,m; b = 4\,m; c = 10\,m$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma) \Leftrightarrow \cos(\gamma) = -\frac{c^2 - a^2 - b^2}{2ab} = -\frac{(10\,cm)^2 - (8\,cm)^2 - (4\,cm)^2}{2 \cdot 8\,cm \cdot 4\,cm} = -\frac{5}{16}$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{108{,}2099569°}$$

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos(\alpha) \;\Leftrightarrow\; \cos(\alpha)=-\frac{a^2-b^2-c^2}{2ab}=-\frac{(8\,cm)^2-(4\,cm)^2-(10\,cm)^2}{2\cdot 4\,cm\cdot 10\,cm}=\frac{13}{20}$$
$$\Rightarrow\; \boldsymbol{\alpha=49{,}45839813\,°}$$

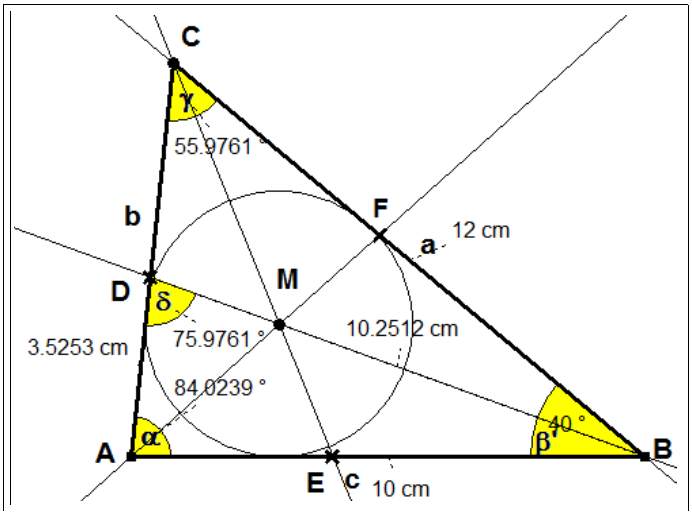
$$\beta=180\,°-\alpha-\gamma=180\,°-49{,}45839813\,°-108{,}2099569\,°=\mathbf{22{,}33164497\,°}$$

<u>Aufgabe 3:</u> In das Dreieck rechts sind die Winkelhalbierenden und der Inkreis eingezeichnet.

$\overline{AD}=3{,}5253\,cm\,;\,c=10\,cm\,;\beta=40\,°$

Berechne a.

$\beta'=\frac{40\,°}{2}=20\,°$, weil Winkelhalbierende.



$$\frac{\sin(\delta)}{\sin(\beta')}=\frac{c}{\overline{AD}} \;\Leftrightarrow\; \sin(\delta)=\frac{c}{\overline{AD}}\cdot\sin(\beta')=\frac{10\,cm}{3{,}5253\,cm}\cdot\sin(20\,°)=0{,}9702699101$$
$$\Rightarrow\; \delta=75{,}99388712\,°$$

$$\alpha=180\,°-\beta'-\delta=180\,°-20\,°-75{,}99388712\,°=84{,}00611288\,°$$

$$\gamma=180\,°-\beta-\alpha=180\,°-40\,°-84{,}00611288\,°=55{,}99388712\,°$$

$$\frac{a}{c}=\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\gamma)} \;\Leftrightarrow\; a=c\cdot\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\gamma)}=10\,cm\cdot\frac{\sin(84{,}00611288\,°)}{\sin(55{,}99388712\,°)}=\mathbf{11{,}99709947}\,\boldsymbol{cm}$$