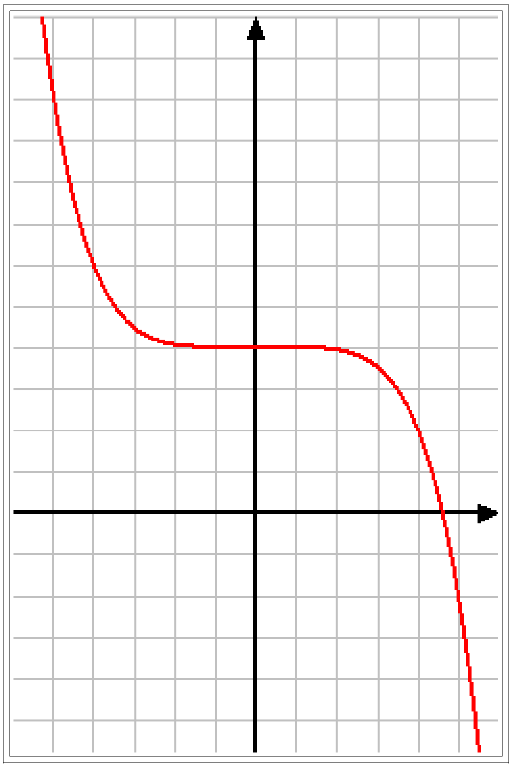
Mathematik Klasse 10a, 3. KA – Potenz- und Exponentialfunktionen – Lösung A 10.03.2014

<u>Aufgabe 1:</u> Vereinfache die folgenden Terme so weit wie möglich:

<u>1.1</u> $a^x \cdot a^7 = \boldsymbol{a^{x+7}}$ **<u>1.2</u>** $\frac{a^{(x^2+y^2)}}{a^{(2xy)}} = a^{x^2+y^2-2xy} = \boldsymbol{a^{(x-y)^2}}$

<u>1.3</u> $\frac{a^{x+2} b^y - 2a^{x+1} b^{y+1} + a^x b^{y+2}}{a^x b^y \cdot (a-b)} + b = \frac{a^x b^y \cdot (a^2 - 2ab + b^2)}{a^x b^y \cdot (a-b)} + b = \frac{(a-b)^2}{(a-b)} + b = a - b + b = \boldsymbol{a}$

<u>Aufgabe 2:</u> Skizziere* die Potenzfunktion mit den folgenden Eigenschaften: Es ist eine Funktion 5. Grades, die um 2 nach oben verschoben ist, und die durch den Punkt $(2|-18)$ geht.



*Skizzieren bedeutet hier: Zeichne ein Koordinatenkreuz ohne Beschriftung und zeichne den Graphen ein. Dabei kommt es nur auf das prinzipielle Aussehen des Graphen an.

<u>Aufgabe 3:</u> Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung:

$$\sqrt[3]{(x+3)^2} = 4 \quad | \; T$$
$$\Leftrightarrow (x+3)^{\frac{2}{3}} = 4 \quad | \; ^{\frac{3}{2}}$$
$$\Leftrightarrow x+3 = 4^{\frac{3}{2}} \quad | \; T$$
$$\Leftrightarrow x+3 = \sqrt{4^3} \quad | \; T$$
$$\Leftrightarrow x+3 = \sqrt{64} \quad | \; T$$
$$\Leftrightarrow x_{1/2}+3 = \pm 8 \quad | \; -3$$
$$\Rightarrow x_1 = -11 \;\; ; \;\; x_2 = 5 \qquad \boldsymbol{L = \{-11 ; 5\}}$$

<u>Aufgabe 4:</u> Vereinfache die folgenden Terme so weit wie möglich:

<u>4.1</u> $\log_3(81a^2) - 2 \cdot \log_3(3a) = \log_3(81a^2) - \log_3((3a)^2) = \log_3\left(\frac{81a^2}{9a^2}\right) = \log_3(9) = \boldsymbol{2}$

<u>4.2</u> $\frac{\ln(x-y)}{\ln(b)} + \log_b(x+y) = \log_b(x-y) + \log_b(x+y) = \log_b((x-y)\cdot(x+y)) = \boldsymbol{\log_b(x^2-y^2)}$

<u>4.3</u> $2 \cdot \log_a(\sqrt{2} \cdot (x+y)) - 2\log_a(x) + \log_a\left(\frac{1}{2}(xy)^{-1}\right) + \log_a(y^{-2})$

$$= \log_a\left(2 \cdot (x+y)^2\right) - \log_a\left(x^2\right) + \log_a\left((2xy)^{-1}\right) - \log_a(y^2)$$
$$= \log_a\left(2 \cdot (x+y)^2\right) - \log_a\left(x^2\right) - \log_a(2xy) - \log_a(y^2)$$
$$= \log_a\left(\frac{2 \cdot (x+y)^2}{x^2 \cdot 2xy \cdot y^2}\right) = \boldsymbol{\log_a\left(\frac{(x+y)^2}{x^3 y^3}\right)}$$

Mathematik Klasse 10a, 3. KA – Potenz- und Exponentialfunktionen – Lösung A 10.03.2014

<u>**Aufgabe 5:**</u> Bei der Reaktorkatastrophe von Tschernobyl im Jahre 1986 wurden unter anderem große Mengen Strontium-90 freigesetzt. Von jedem Kilogramm Strontium-90 waren nach zehn Jahren noch 785,9647327 g übrig.

<u>**5.1**</u> Zeige, dass der Zerfall von Strontium-90 mit Hilfe der Funktion $f(t)=N_0\cdot 0{,}9762033775^t$ (t in Jahren) beschrieben werden kann.

Allgemein ist $f(t)=N_0\cdot a^t$. Hier ist $N_0=1\,kg$ und *a* der Wachstumsfaktor für *t in Jahren*. Laut Aufgabenstellung liegt der Punkt $(10|0{,}7859647327)$ auf dem Graphen der Funktion. Einsetzen:

$$0{,}7859647327\,kg=1\,kg\cdot a^{10} \quad | \ :1\,kg$$
$$\Leftrightarrow 0{,}7859647327=a^{10} \quad |^{\frac{1}{10}}$$
$$\Leftrightarrow 0{,}7859647327^{\frac{1}{10}}=a$$
$$\Leftrightarrow 0{,}9762033775\approx a$$

Damit ist $\boldsymbol{f(t)=N_0\cdot 0{,}9762033775^t}$

<u>**5.2**</u> Berechne, wie viel Strontium-90 heute (nach 28 Jahren) von jedem Kilogramm noch übrig ist.

$$f(28)=1\,kg\cdot 0{,}9762033775^{28}\approx \mathbf{0{,}50948}\,\boldsymbol{kg}$$

A: Nach 28 Jahren sind pro Kilogramm noch 509,48 g übrig.

<u>**5.3**</u> Berechne die Halbwertszeit von Strontium-90.

$f(T_{1/2})=500\,g$ Einsetzen:

$$500\,g=1000\,g\cdot 0{,}9762033775^{T_{1/2}} \quad | \ :1000\,g$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}=0{,}9762033775^{T_{1/2}} \quad | \ \ln$$
$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right)=\ln\left(0{,}9762033775^{T_{1/2}}\right) \quad | \ T$$
$$\Leftrightarrow -\ln(2)=T_{1/2}\cdot\ln(0{,}9762033775) \quad | \ :\ln(0{,}9762033775)$$
$$\Leftrightarrow -\frac{\ln(2)}{\ln(0{,}9762033775)}=T_{1/2}$$
$$\Leftrightarrow \mathbf{28{,}78}\approx \boldsymbol{T_{1/2}}$$

A: Die Halbwertszeit beträgt 28,78 Jahre.