Mathematik Klasse 10a, 2. KA – Flächen und Körper – Lösung B **25.11.2013**

Aufgabe 1: Gegeben ist ein Kreis mit dem Radius r, dem Durchmesser d, dem Flächeninhalt A und dem Umfang U.

a) $r=4\,mm$: Berechne A. $\boldsymbol{A}=\pi r^2=\pi\cdot(4\,mm)^2=16\pi\,mm^2\approx\mathbf{50{,}27\,mm^2}$

b) $d=0{,}4\,cm$: Berechne U. $\boldsymbol{U}=2\pi r=\pi d=\pi\cdot 0{,}4\,cm=\frac{4\pi}{10}cm\approx\mathbf{1{,}26\,cm}$

c) $A=9\pi\,dm$: Berechne U. $A=\pi r^2\Leftrightarrow r=\sqrt{\frac{A}{\pi}}$

$$\boldsymbol{U}=2\pi r=2\pi\sqrt{\frac{A}{\pi}}=2\pi\cdot\sqrt{\frac{9\pi\,dm^2}{\pi}}=2\pi\cdot 3\,dm=6\pi\,dm\approx\mathbf{18{,}85\,dm}$$

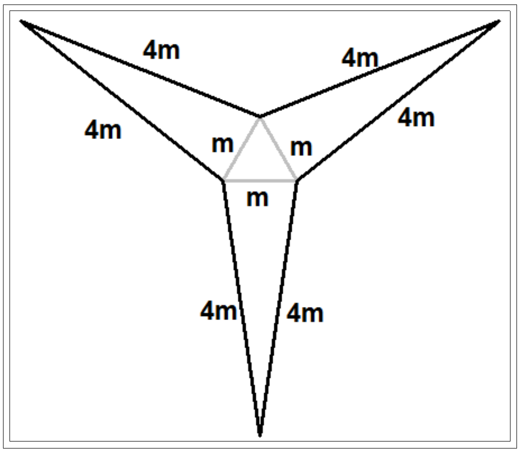
Aufgabe 2: Gegeben ist ein Kreisteilstück, dass durch den Mittelpunktswinkel α (bzw. *x* im Bogenmaß) von einem Vollkreis mit dem Radius r abgeteilt ist. Das Kreisteilstück hat die Fläche A_T und die zugehörige Kreisbogenlänge *b*.

a) $\alpha=40°$: Berechne x. $\boldsymbol{x}=\alpha\cdot\frac{\pi}{180°}=40°\cdot\frac{\pi}{180°}=\frac{2}{9}\pi\approx\mathbf{0{,}70}$

b) $r=4\,cm$; $x=2$: Berechne b. $x=\frac{b}{r}\Leftrightarrow\boldsymbol{b}=x\,r=4\,cm\cdot 2\,cm=\mathbf{8\,cm}$

c) $r=2\,m$; $x=0{,}5$: Berechne A_T. $\boldsymbol{A_T}=\frac{1}{2}x\,r^2=\frac{1}{2}\cdot 0{,}5\cdot(2\,m)^2=\frac{1}{4}\cdot 4\,m^2=\mathbf{1\,m^2}$

Aufgabe 3: Leite eine Formel zur Berechnung des Umfangs und des Flächeninhalts der Figur rechts her. (Außer der allgemeinen Dreiecksformel dürfen keine anderen Spezialformeln für Dreiecke benutzt werden). Vereinfache die Formel so weit wie möglich.



Umfang: $\boldsymbol{U}=6\cdot 4\text{m}=\mathbf{24\,m}$

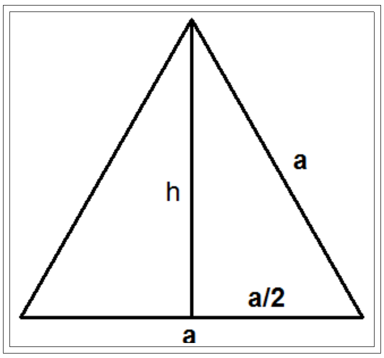
Fläche:

Mitte: Gleichseitiges Dreieck mit dem Flächeninhalt A_G

Außen: Drei gleichschenklige Dreiecke mit jeweils dem Flächeninhalt A_S

Es gilt: $A=A_D+3\cdot A_S$

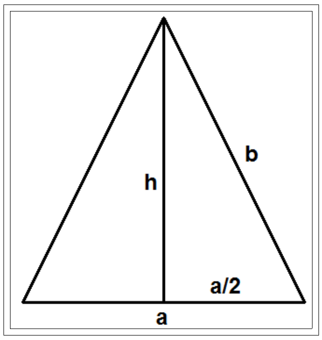
Herleitung Formel gleichseitiges Dreieck:



$$h^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=a^2 \;\Leftrightarrow\; h^2=a^2-\frac{a^2}{4}=\frac{3}{4}a^2 \;\Rightarrow h=\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$A_D=\frac{1}{2}a\cdot h=\frac{1}{2}\frac{a\cdot\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

Herleitung Formel gleichschenkliges Dreieck:



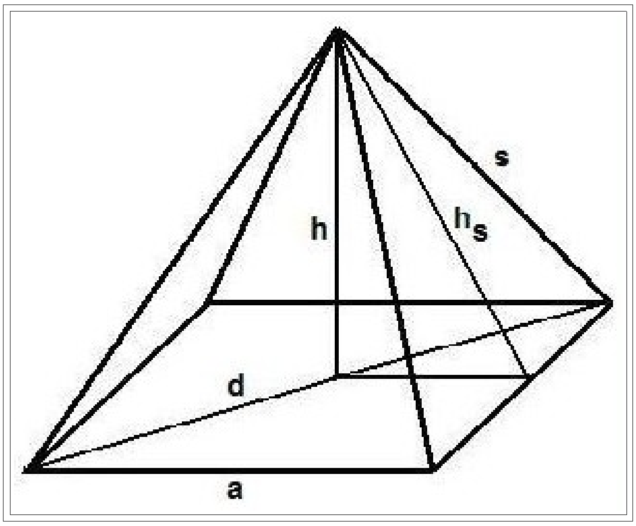
$$h^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=b^2 \;\Leftrightarrow\; h^2=b^2-\frac{a^2}{4} \;\Rightarrow h=\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}$$

$$A_S=\frac{1}{2}a\cdot h=\frac{1}{2}a\cdot\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}$$

$$A=\frac{\sqrt{3}}{4}m^2+3\cdot\frac{1}{2}m\cdot\sqrt{(4\mathrm{m})^2-\frac{m^2}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{4}m^2+\frac{3}{2}m\sqrt{16\mathrm{m}^2-\frac{m^2}{4}}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}m^2+\frac{3}{2}m\sqrt{\frac{63}{4}m^2}=\frac{\sqrt{3}}{4}m^2+\frac{3\cdot\sqrt{63}}{4}m^2$$

$$\boldsymbol{A=\frac{3\sqrt{63}+\sqrt{3}}{4}m^2}$$

Aufgabe 4: Gegeben ist ein regelmäßige Pyramide mit einer quadratischen Grundfläche mit der Kantenlänge $a=6\,cm$.
Die Höhe der Pyramide ist $h=10\,cm$.



a) Berechne die Länge der Seitenkante *s* der Pyramide.

$$h_s^2=h^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=h^2+\frac{a^2}{4} \;\Rightarrow h_s=\sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}}$$
$$h_s=\sqrt{(100\,cm)^2+\frac{(6\,cm)^2}{4}}=\sqrt{100\,cm^2+9\,cm^2}$$
$$=\sqrt{109}\,cm\approx 10{,}44\,cm$$

$$s^2=h_s^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=h^2+\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}=h^2+\frac{a^2}{2}$$

$$=(10\,cm)^2+\frac{(6\,cm)^2}{2}=100\,cm^2-\frac{36\,cm^2}{2}=118\,cm^2 \qquad \Rightarrow \boldsymbol{s=\sqrt{118}\,cm}\approx 10{,}86\,cm$$

b) Berechne den Mantelflächeninhalt der Pyramide

$$\boldsymbol{M}=4\cdot A_D=4\cdot\frac{1}{2}a\cdot h_s=2\,a\,h_s=2\,a\cdot\sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}}=2\cdot 6\,cm\cdot\sqrt{(10\,cm)^2+\frac{(6\,cm)^2}{4}}$$
$$=12\,cm\cdot\sqrt{109\,cm^2}\approx\boldsymbol{125{,}28\,cm^2}$$

<u>Aufgabe 5:</u> Eine Toilettenpapierrolle ist 10 cm breit und der Durchmesser beträgt 16 cm. Die Papprolle in der Mitte hat einen Außendurchmesser von 6 cm.

Berechne die Mindestanzahl der Blätter auf der Rolle, wenn ein Blatt 12 cm lang und 0,4 mm dick ist.

Berechnung des Volumens, dass vom Teppich auf der Rolle eingenommen wird:

Volumen Außenzylinder:

$$V_A=\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2\cdot h=\pi\cdot(8\,cm)^2\cdot 10\,cm=64\,\pi\,cm^2\cdot 10\,cm=640\,\pi\,cm^2\approx 2010{,}619\,cm^3$$

Volumen Innenzylinder: $V_I=\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2\cdot h=\pi\cdot(3\,cm)^2\cdot 10\,cm=9\,\pi\,cm^2\cdot 10\,cm=90\,\pi\,cm^3\approx 282{,}74\,cm^3$

Volumen Hohlzylinder: $V_H=V_A-V_I=\pi(640-90)\,cm^3=550\,\pi\,cm^3=1727{,}88\,cm^3$

Papierdicke: $d=0{,}4\,mm=0{,}04\,cm$

Volumen eines Blattes: $V_B=0{,}04\,cm\cdot 12\,cm\cdot 10\,cm=4{,}8\,cm^3$

Anzahl Blätter $n=\frac{V_H}{V_B}=\frac{550\,\pi\,cm^2}{4{,}8\,cm^2}\approx 359{,}97$

A: Es sind mindestens 359 Blätter auf der Rolle.