Mathematik Klasse 10a, 2. KA – Flächen und Körper – Lösung A **25.11.2013**

Aufgabe 1: Gegeben ist ein Kreis mit dem Radius r, dem Durchmesser d, dem Flächeninhalt A und dem Umfang U.

a) $r=2\,cm$: Berechne U. $\boldsymbol{U}=2\pi r=2\pi\cdot 2\,cm=4\pi\,cm\approx\mathbf{12{,}57\ cm}$

b) $d=0{,}4\,mm$: Berechne A.

$$\boldsymbol{A}=\pi r^2=\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2=\frac{\pi}{4}d^2=\frac{\pi}{4}\cdot(0{,}4\,mm)^2=\frac{\pi}{4}\cdot 0{,}16\,mm^2=\frac{4}{25}\pi\,mm^2\approx\mathbf{0{,}13\,mm^2}$$

c) $U=4\pi\,km$: Berechne A. $U=2\pi r\Leftrightarrow r=\frac{U}{2\pi}$

$$\boldsymbol{A}=\pi r^2=\pi\left(\frac{U}{2\pi}\right)^2=\pi\cdot\left(\frac{4\pi\,km}{2\pi}\right)^2=\pi\cdot(2\,km)^2=4\pi\,km^2\approx\mathbf{12{,}57\ km^2}$$

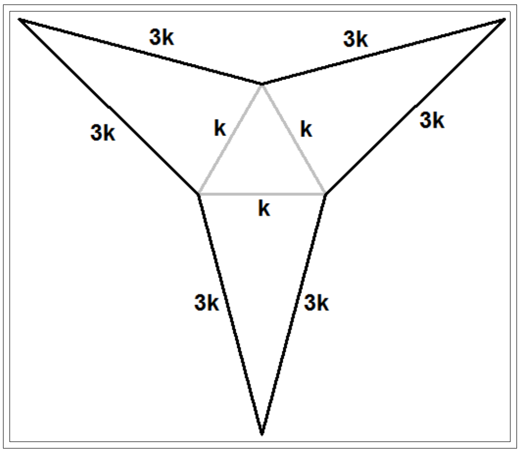
Aufgabe 2: Gegeben ist ein Kreisteilstück, dass durch den Mittelpunktswinkel α (bzw. *x* im Bogenmaß) von einem Vollkreis mit dem Radius r abgeteilt ist. Das Kreisteilstück hat die Fläche A_T und die zugehörige Kreisbogenlänge *b*.

a) $x=0{,}5$: Berechne α. $\boldsymbol{\alpha}=x\cdot\frac{180°}{\pi}=0{,}5\cdot\frac{180°}{\pi}=\frac{90°}{\pi}\approx\mathbf{28{,}65°}$

b) $r=2\,cm$; $\alpha=50°$: Berechne b. $\boldsymbol{b}=\frac{\alpha}{180}°\pi r=\frac{50°}{180°}\pi\cdot 2\,cm=\frac{5\pi}{9}cm\approx\mathbf{1{,}75\,cm}$

c) $r=2\,m$; $b=0{,}5\,m$: Berechne x. $\boldsymbol{x}=\frac{b}{r}=\frac{0{,}5\,m}{2\,m}=\mathbf{0{,}25}$

Aufgabe 3: Leite eine Formel zur Berechnung des Umfangs und des Flächeninhalts der Figur rechts her. (Außer der allgemeinen Dreiecksformel dürfen keine anderen Spezialformeln für Dreiecke benutzt werden). Vereinfache die Formel so weit wie möglich.



Umfang: $\boldsymbol{U}=6\cdot 3\mathrm{k}=\mathbf{18}\,\boldsymbol{k}$

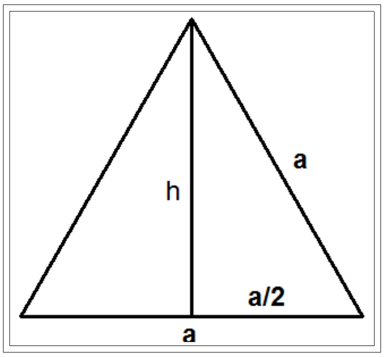
Fläche:

Mitte: Gleichseitiges Dreieck mit dem Flächeninhalt A_G

Außen: Drei gleichschenklige Dreiecke mit jeweils dem Flächeninhalt A_S

Es gilt: $A=A_D+3\cdot A_S$

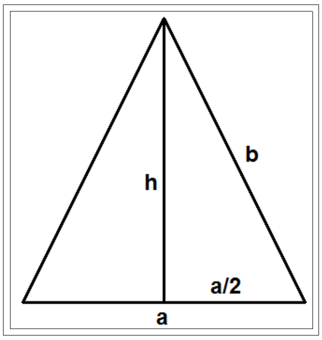
Herleitung Formel gleichseitiges Dreieck:



$$h^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=a^2\ \Leftrightarrow\ h^2=a^2-\frac{a^2}{4}=\frac{3}{4}a^2\ \Rightarrow h=\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$A_D=\frac{1}{2}a\cdot h=\frac{1}{2}\frac{a\cdot\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

Herleitung Formel gleichschenkliges Dreieck:



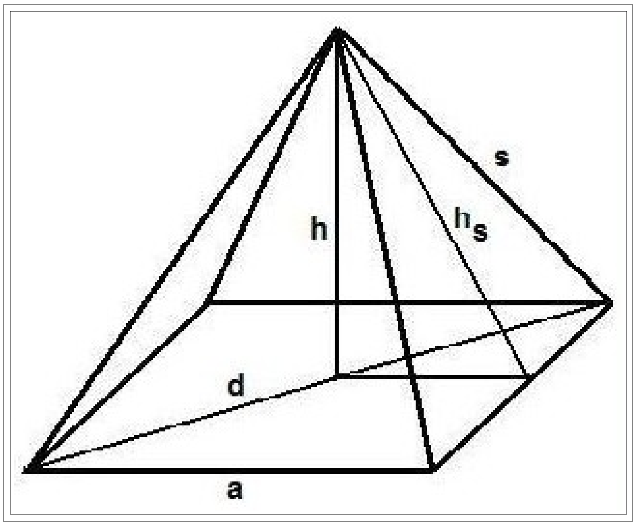
$$h^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=b^2 \Leftrightarrow h^2=b^2-\frac{a^2}{4} \Rightarrow h=\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}$$

$$A_S=\frac{1}{2}a\cdot h=\frac{1}{2}a\cdot\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}$$

$$A=\frac{\sqrt{3}}{4}k^2+\frac{3\cdot 1}{2}k\cdot\sqrt{(3\mathrm{k})^2-\frac{k^2}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{4}k^2+\frac{3}{2}k\sqrt{9\mathrm{k}^2-\frac{k^2}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{4}k^2+\frac{3}{2}k\sqrt{\frac{35}{4}k^2}=\frac{\sqrt{3}}{4}k^2+\frac{3\cdot\sqrt{35}}{4}k^2$$

$$\boldsymbol{A=\frac{3\sqrt{35}+\sqrt{3}}{4}k^2}$$

<u>Aufgabe 4:</u> Gegeben ist ein regelmäßige Pyramide mit einer quadratischen Grundfläche mit der Kantenlänge $a=4\,cm.$
Die Länge der Seitenkante ist $s=10\,cm.$



a) Berechne die Höhe h der Pyramide.

$$h_s^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=s^2 \Leftrightarrow h_s^2=s^2-\frac{a^2}{4} \Rightarrow h_s=\sqrt{s^2-\frac{a^2}{4}}$$

$$h_s=\sqrt{(100\,cm)^2-\frac{(4\,cm)^2}{4}}=\sqrt{100\,cm^2-4\,cm^2}$$
$$=\sqrt{96}\,cm\approx 9{,}80\,cm$$

$$h^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=h_s^2$$
$$\Leftrightarrow h^2=h_s^2-\frac{a^2}{4}=s^2-\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{4}$$
$$=s^2-\frac{a^2}{2}=(10\,cm)^2-\frac{(4\,cm)^2}{2}=100\,cm^2-\frac{16\,cm^2}{2}=92\,cm^2 \quad \Rightarrow \boldsymbol{h=\sqrt{92}\,cm}\approx 9{,}60\,cm$$

b) Berechne den Mantelflächeninhalt der Pyramide

$$\boldsymbol{M}=4\cdot A_D=4\cdot\frac{1}{2}a\cdot h_s=2\,a\,h_s=2\,a\cdot\sqrt{s^2-\frac{a^2}{4}}=2\cdot 4\,cm\cdot\sqrt{(10\,cm)^2-\frac{(4\,cm)^2}{4}}=8\,cm\cdot\sqrt{96\,cm^2}\approx\boldsymbol{78{,}38\,cm^2}$$

Mathematik Klasse 10a, 2. KA – Flächen und Körper – Lösung A **25.11.2013**

<u>Aufgabe 5:</u> Herr Gabriel möchte in seinem Flur Teppichboden verlegen. Der Flur ist 2 m breit und 3 m lang.

Im Baumarkt gibt es einen günstigen Rest auf einer Rolle, die auch genau 2 m breit ist und einen Durchmesser von von 40 cm hat. Die Papprolle in der Mitte hat einen Außendurchmesser von 10 cm. Der Teppich auf der Rolle ist ungefähr 1 cm dick.

Berechne, ob der Teppichrest für den Flur ausreicht.

Berechnung des Volumens, dass vom Teppich auf der Rolle eingenommen wird:

Volumen Außenzylinder: $V_A = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot h = \pi \cdot (20\,cm)^2 \cdot 2\,m = \pi\, 0{,}2^2\, m^2 \cdot 2\,m = \pi\, 0{,}08\, m^3 \approx 0{,}251323\, m^3$

Volumen Innenzylinder: $V_I = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot h = \pi \cdot (5\,cm)^2 \cdot 2\,m = \pi\, 0{,}05^2\, m^2 \cdot 2\,m = \pi\, 0{,}005\, m^3 \approx 0{,}01571\, m^3$

Volumen Hohlzylinder: $V_H = V_A - V_I = \pi (0{,}08 - 0{,}005)\, m^3 = \pi\, 0{,}075\, m^3 = 0{,}23562\, m^3$

Teppichdicke: $h = 1\,cm = 0{,}01\,m$

Fläche Teppich auf der Rolle: $A_T = \frac{V_H}{h} = \pi\, 0{,}075 \frac{m^3}{0{,}01}\, m = 7{,}5\,\pi\, m^2 \approx 23{,}562\, m^2$

Fläche Flur: $A_F = a \cdot b = 2\,m \cdot 3\,m = 6\,m^2$

A: Der Teppich auf der Rolle reicht locker aus.