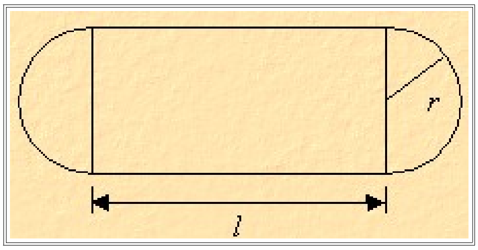
Mathematik LK 11 M2, HÜ 05 – Extremwerte und Funktionsbestimmung **20.02.2013**

Lösung B

Aufgabe 1: Viele Hallen für Leichtathletik haben eine 200 m-Laufbahn, die aus zwei Geraden und zwei Halbkreisen besteht.



Berechne die maximalen Maße eines rechteckigen Spielfeldes im Inneren einer solchen 200 m-Bahn.

Gesucht Fläche $A=l\cdot 2\mathrm{r}$

Nebenbedingung: $2\mathrm{l}+2\pi r=200 \Leftrightarrow l+\pi r=100 \Leftrightarrow l=100-\pi r$

Zielfunktion: $A(r)=(100-\pi r)\cdot 2r=-2\pi r^2+200r$ Gesucht: Maximum

Entweder Differentialrechnung oder, weil die Zielfunktion eine Parabel ist, Scheitelpunktsbestimmung:

$$A(r)=-2\pi r^2+200r=-2\pi\left(r^2-\frac{100}{\pi}r\right)=-\pi\left(r^2-\frac{100}{\pi}r+\left(\frac{50}{\pi}\right)^2-\left(\frac{50}{\pi}\right)^2\right)$$

$$=-\pi\left(\left(r-\frac{50}{\pi}\right)^2-\left(\frac{50}{\pi}\right)^2\right)=-\pi\left(r-\frac{50}{\pi}\right)^2+\frac{2500}{\pi} \qquad \Rightarrow SP\left(\frac{50}{\pi}\middle|\frac{2500}{\pi}\right)$$

Da die Parabel nach unten geöffnet ist, handelt es sich beim Scheitelpunkt um das globale Maximum.

A: Die maximale Fläche beträgt 795,77 m².

Aufgabe 2: Eine ganzrationale Funktion dritten Grades hat im Wendepunkt $P_1(1|y_1)$ die Steigung $m_1=-2$. Der Graph schneidet die y-Achse bei $y_2=5$ in einem Extrempunkt.

Bestimme die Funktionsgleichung.

Ganzrationale Funtkion dritten Grades: $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

$\Rightarrow f'(x)=3\mathrm{a}x^2+2\mathrm{bx}+c$

$\Rightarrow f''(x)=6\mathrm{a}x+2\mathrm{b}$

Nebenbedingungen:

I. $f''(1)=0 \Leftrightarrow 0=6\cdot a\cdot 1+2b \Leftrightarrow 0=6\mathrm{a}+2\mathrm{b} \quad | \; I.-II.$

II. $f'(1)=-2 \Leftrightarrow -2=3\cdot a\cdot 1+2\cdot b\cdot 1+c \Leftrightarrow -2=3\mathrm{a}+2\mathrm{b}$

III. $f(0)=5 \Leftrightarrow 5=a\cdot 0^3+b\cdot 0^2+c\cdot 0+d \Leftrightarrow \mathbf{5=d}$

IV. $f'(0)=0 \Leftrightarrow 0=3\cdot a\cdot 0^2+2\cdot b\cdot 0+c \Leftrightarrow \mathbf{0=c}$

IIIa. $2=3\mathrm{a} \Leftrightarrow \boldsymbol{a=\frac{2}{3}}$

Setze $a=\frac{2}{3}$ in II ein: $-2=3\cdot\frac{2}{3}+2\mathrm{b} \quad | \; -2 \qquad \Leftrightarrow -4=2\mathrm{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{-2=b}$

Damit ist $\boldsymbol{f(x)=-\frac{2}{3}x^3-2x+5}$