Mathematik Klasse 10b, AB 10 – Trigonometrie 02 – Lösung **02.05.2013**

Aufgabe 1:

Für die Winkel α und β gilt: $\sin(\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ und $\tan(\beta)=\sqrt{3}$. Berechne

a) $\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha)$

$$\cos(\alpha)=\sqrt{1-\sin^2(\alpha)}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{2}{4}}=\frac{\sqrt{1}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin(\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\mathbf{\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

b) $\tan(\alpha)\cdot\cos(\beta)\cdot\sin(\beta)$

$$\tan(\alpha)=\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=1$$

$$\sqrt{3}=\tan(\beta) \qquad |\,^2$$

$$\Rightarrow 3=\frac{\sin^2(\beta)}{1-\sin^2(\beta)} \qquad | \quad \cdot\left(1-\sin^2(\alpha)\right)$$
$$\Leftrightarrow 3\left(1-\sin^2(\beta)\right)=\sin^2(\beta) \quad | \, T$$
$$\Leftrightarrow 3\left(1-\sin^2(\beta)\right)=\sin^2(\beta)$$
$$\Leftrightarrow 3-3\sin^2(\beta)=\sin^2(\beta) \qquad | \quad +3\sin^2(\alpha)$$
$$\Leftrightarrow 3=4\sin^2(\beta) \qquad | \quad :4$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}=\sin^2(\beta) \qquad | \quad \sqrt{}$$
$$\Rightarrow \sin(\beta)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)}=\tan(\beta) \;\Leftrightarrow\; \cos(\beta)=\frac{\sin(\beta)}{\tan(\beta)}$$

$$\mathbf{\tan(\alpha)\cdot\cos(\beta)\cdot\sin(\beta)}=\tan(\alpha)\cdot\frac{\sin(\beta)}{\tan(\beta)}\cdot\sin(\beta)=\tan(\alpha)\cdot\frac{\sin^2(\beta)}{\tan(\beta)}=1\cdot\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{\sqrt{3}}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\mathbf{\frac{\sqrt{3}}{4}}$$

Mathematik Klasse 10b, AB 10 – Trigonometrie 02 – Lösung **02.05.2013**

Aufgabe 2:

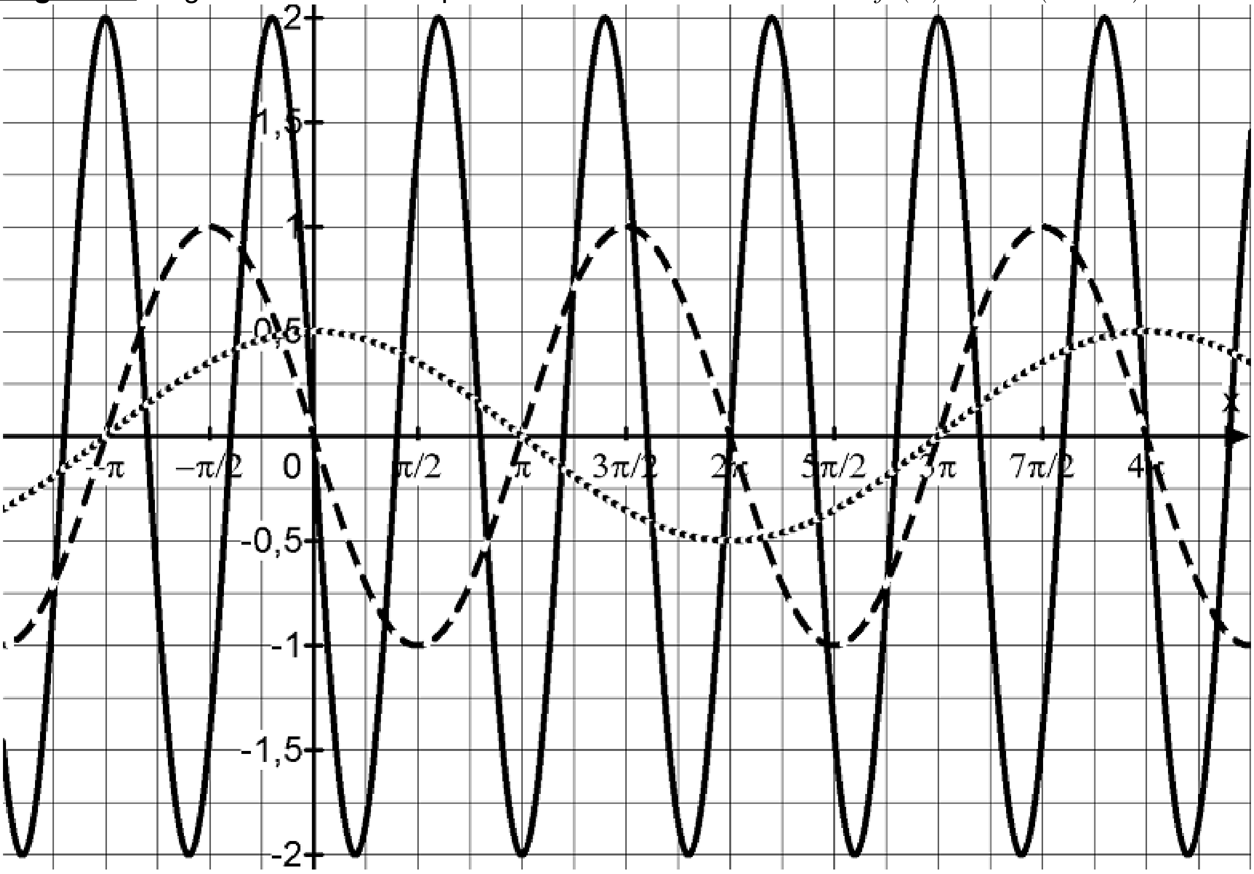
Vereinfache die folgenden Terme so weit wie möglich

a) $$\frac{\mathbf{\sin^2(\alpha)}}{\mathbf{1-\sin^2(\alpha)}}=\frac{\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}=\mathbf{\tan^2(\alpha)}$$

b) $$\frac{\mathbf{(8-8\cos(\alpha))\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cos(\alpha)\right)}}{\mathbf{2\tan(\alpha)}}=\frac{8\cdot(1-\cos(\alpha))\cdot\frac{1}{4}(1+\cos(\alpha))}{2\tan(\alpha)}$$
$$=\frac{2\cdot(1-\cos^2(\alpha))}{2\tan(\alpha)}=\frac{\sin^2(\alpha)}{\tan(\alpha)}=\sin^2(\alpha)\cdot\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}=\mathbf{\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha)}$$

c) $$\frac{\mathbf{\cos(\alpha)\left[1-\left(1-\sin^2(\alpha)\right)\right]+\cos(\alpha)\left[1-\left(1-\cos^2(\alpha)\right)\right]}}{\mathbf{\sin(\alpha)\tan(\alpha)}}=\frac{\cos(\alpha)\left[\left(1-\cos^2(\alpha)\right)+\left[1-\sin^2(\alpha)\right)\right]}{\sin(\alpha)\cdot\tan(\alpha)}$$
$$=\frac{\cos(\alpha)\left[\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)\right]}{\sin(\alpha)\tan(\alpha)}=\frac{\cos(\alpha)\cdot 1}{\sin(\alpha)\tan(\alpha)}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{\tan^2(\alpha)}}$$

Aufgabe 4: Gegeben sind drei Graphen von Funktionen der Form $f(x) = a \cdot \sin(bx - e)$



a) Gib für alle drei Graphen die Periode und die Phasenverschiebung an.

durchgezogen: $a = 2$, $p = 2\pi$, $c = \frac{p}{2} = \frac{2\pi}{2} = +\pi$ (oder $c = -\pi$)

gestrichelt: $a = 1$, $p = \frac{4}{3}\pi$, $c = \frac{p}{2} = \frac{\frac{4}{3}\pi}{2} = +\frac{2}{3}\pi$ (oder $c = -\frac{1}{3}\pi$)

punktiert: $a = 0{,}5$, $p = 4\pi$, $c = \frac{p}{4} = \frac{4\pi}{\pi} = -\pi$ (oder $c = +3\pi$)

b) Gib für alle drei Graphen die Funktionsgleichung an.

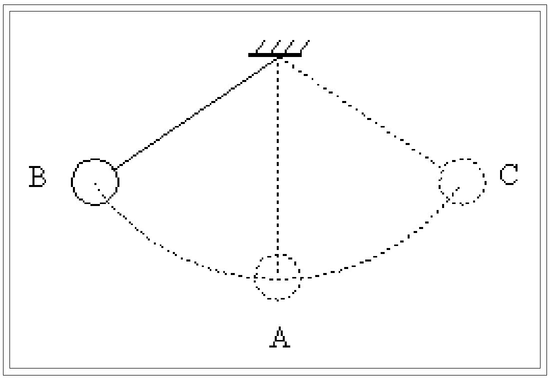
durchgezogen: $b = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$ $e = bc = 1 \cdot \pi = \pi$ $\Rightarrow \boldsymbol{f(x) = 2 \cdot \sin(x - \pi)}$

gestrichelt: $b = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{\frac{4}{3}\pi} = \frac{3}{2}$ $e = bc = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}\pi = \pi$ $\Rightarrow \boldsymbol{f(x) = \sin(1{,}5x - \pi)}$

punktiert: $b = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$ $e = bc = \frac{1}{2} \cdot (-\pi) = -\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow \boldsymbol{f(x) = 0{,}5 \sin(0{,}5x + 0{,}5\pi)}$

Mathematik Klasse 10b, AB 10 – Trigonometrie 02 – Lösung **02.05.2013**

Aufgabe 4:



Ein Fadenpendel besteht aus einem Faden mit einem angehängten Gewicht. Lässt man das Gewicht einfach ruhig hängen, nennt man die Position des Gewichts "Gleichgewichtslage" bzw. "Ruhelage" (Position A).

Die Schwingung eines Fadenpendels lässt sich mit folgender Gleichung beschreiben:

$$y(t)=y_0\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot t\right)$$

Diese Funktionsgleichung gibt die Auslenkung *y(t)* (Entfernung von der Gleichgewichtslage) in Abhängigkeit von der Zeit *t* an. Dabei ist *l* die Länge des Fadens und *g* der Ortsfaktor.

$y_0=0{,}5\,m$; $l=22{,}5\,m,\ g=10\,N/kg$ *Hinweis: Es darf ohne Einheiten gerechnet werden.*

a) Berechne die Auslenkung in Meter zum Zeitpunkt $t=3\pi$ Sekunden.

$$y(3\pi)=0{,}5\cdot\cos\left(\sqrt{\frac{10}{22{,}5}}\cdot 3\pi\right)=0{,}5\cdot\cos\left(\sqrt{\frac{100}{225}}\cdot 3\pi\right)=0{,}5\cdot\cos\left(\frac{10}{15}\cdot 3\pi\right)=0{,}5\cdot\cos\left(\frac{2}{3}\cdot 3\pi\right)$$
$$=0{,}5\cdot\cos(2\pi)=0{,}5\cdot 1=\mathbf{0{,}5}$$

A: Die Auslenkung beträgt 0,5 m.

b) Bestimme den Zeitpunkt, zu dem das Pendel das erste Mal durch die Ruhelage geht.

Die Funktion ist vom Typ $y(t)=a\cdot\cos(bx)$ Es gilt $p=\frac{2\pi}{b}$ (Hier Periodendauer T, weil die Funktionsvariable eine Zeit ist)

$$T=2\frac{\pi}{\sqrt{\frac{g}{l}}}=2\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}=2\pi\cdot\sqrt{\frac{22{,}5}{10}}=2\pi\cdot\sqrt{\frac{225}{100}}=2\pi\cdot\frac{15}{10}=2\frac{\pi\cdot 3}{2}=3\pi$$

Bei der höchsten Auslenkung wird losgelassen. Nach ¼ der Periode wird die Ruhelage erreicht.

Also $\boldsymbol{t_0}=\frac{T}{4}=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{\pi}$

Alternativ: Auflösen der Gleichung $0=0{,}5\cdot\cos\left(\sqrt{\frac{10}{22{,}5}}\cdot t_0\right)$ nach t_0. $|\ \cdot 2$

$\Leftrightarrow 0=\cos\left(\sqrt{\frac{10}{22{,}5}}\cdot t_0\right)\quad |\ \arccos()\qquad \Rightarrow\frac{\pi}{2}=\sqrt{\frac{10}{22{,}5}}\cdot t_0$ usw. (Hinweis: arccos() ist keine Äquivalenzumformung, da es unendlich viele Winkel gibt, die den Kosinuswert 0 haben.

A: Nach $\mathbf{0{,}75\pi}$ Sekunden wird die Ruhelage das erste Mal erreicht.