Mathematik Klasse 10b, 4. Klassenarbeit – Trigonometrie II – Lösung B **16.05.2013**

<u>Aufgabe 1:</u> Bestimme die fehlenden Seiten und Winkel des Dreiecks ABC mit Hilfe des Sinussatzes oder mit Hilfe des Kosinussatzes:

a) $a=5{,}5\,cm$; $b=7\,cm$; $\alpha=25°$

$$\frac{b}{a}=\frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha)} \Leftrightarrow \sin(\beta)=\frac{b}{a}\cdot\sin(\alpha)$$

$$\sin(\beta)=\frac{7\,cm}{5{,}5\,cm}\cdot\sin(25°)\approx 0{,}5379$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\beta=32{,}5393°}$$

$$\gamma=180°-\beta-\alpha=\mathbf{122{,}4671°}$$

$$\frac{c}{a}=\frac{\sin(\gamma)}{\sin(\alpha)} \Leftrightarrow c=a\cdot\frac{\sin(\gamma)}{\sin(\alpha)}$$

$$c=5{,}5\,cm\cdot\frac{\sin(122{,}46°)}{\sin(25°)}=\mathbf{10{,}9808\,cm}$$

Dreieck 1:

$a=5{,}5\,cm$; $b=7\,cm$; $\mathbf{c=10{,}98\,cm}$

$\alpha=25°$; $\boldsymbol{\beta=32{,}54°}$; $\boldsymbol{\gamma=122{,}47°}$

Prüfung auf zweites Dreieck:

$$\beta'=180°-\beta=\mathbf{147{,}4607°}$$

$$\gamma'=180°-\beta'-\alpha'=\mathbf{7{,}5393°}$$

$$\frac{c'}{a}=\frac{\sin(\gamma')}{\sin(\alpha)} \Leftrightarrow c'=a\cdot\frac{\sin(\gamma')}{\sin(\alpha)}$$

$$c'=5{,}5\,cm\cdot\frac{\sin(7{,}54°)}{\sin(25°)}\approx\mathbf{1{,}7075\,cm}$$

Dreieck 2:

$a=5{,}5\,cm$; $b=7\,cm$; $\mathbf{c'=1{,}71\,cm}$

$\alpha=25°$; $\boldsymbol{\beta'=147{,}46°}$; $\boldsymbol{\gamma'=7{,}54°}$

b) $a=3{,}5\,cm$; $b=5\,cm$; $\alpha=55°$

$$\frac{b}{a}=\frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha)} \Leftrightarrow \sin(\beta)=\frac{b}{a}\cdot\sin(\alpha)$$

$$\sin(\beta)=\frac{5\,cm}{3{,}5\,cm}\cdot\sin(55°)\approx 1{,}1702$$

$\sin(\beta)>1 \Rightarrow$ Es gibt kein passendes Dreieck.

c) $a=7{,}2\,cm$; $c=4{,}5\,cm$; $\beta=55°$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos(\beta)$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{b}=\sqrt{a^2+c^2-2ac\cdot\cos(\beta)}$$

$$=\sqrt{(7{,}2\,cm)^2+(4{,}5\,cm)^2-2\cdot 7{,}2\,cm\cdot 4{,}5\,cm\cdot\cos(55°)}$$

$$\approx\mathbf{5{,}9095\,cm}$$

$$a^2=b^2+c^2-2ab\cdot\cos(\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \cos(\alpha)=-\frac{a^2-b^2-c^2}{2ab}$$

$$=-\frac{(7{,}2\,cm)^2-(5{,}91\,cm)^2-(4{,}5\,cm)^2}{2\cdot 7{,}2\,cm\cdot 5{,}91\,cm}$$

$$\approx 0{,}0392$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\beta=87{,}76°}$$

$$\gamma=180°-\alpha-\beta=\mathbf{37{,}24°}$$

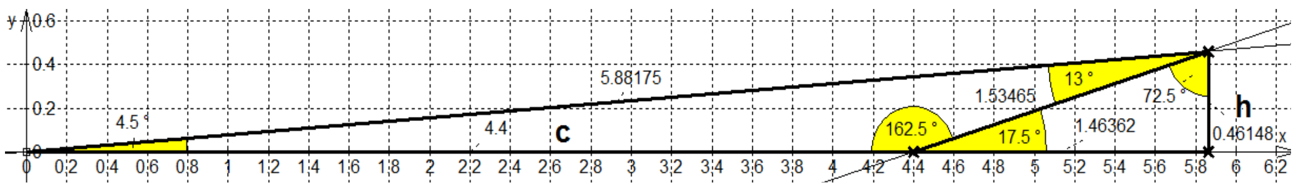
Also:

$a=7{,}2\,cm$; $\mathbf{b=5{,}91\,cm}$; $c=4{,}5\,cm$

$\boldsymbol{\alpha=87{,}76°}$; $\beta=55°$; $\boldsymbol{\gamma=37{,}24°}$

<u>Aufgabe 2:</u> Von einem Punkt A aus sieht man die Spitze eines Aussichtsturms mit der Höhe h in einem Winkel von $\alpha=17{,}5°$ gegenüber dem ebenen Grund. Bewegt man sich von Punkt A $c=440\,m$ geradlinig vom Aussichtsturm weg verändert sich der Winkel zu $\beta=4{,}5°$.

a) Fertige eine Skizze an, welche obige Situation wiedergibt. Zeichne das (oder die) Dreieck(e) ein, mit dessen Hilfe du die Höhe h berechnen kannst. Benenne die Seiten und Winkel.



Maßstabgetreu in $m\cdot 100$

Bezeichnungen: linkes Dreieck $\beta, \gamma, \alpha', b, c, a$; rechtwinkliges Dreieck: $\alpha', \gamma', h, b, c'$

b) Berechne die Höhe h des Aussichtsturms.

linkes Dreieck:

$$\alpha' = 180° - \alpha = 180° - 17{,}5° = 162{,}5°$$
$$\gamma = 180° - \alpha' - \beta = 180° - 162{,}5° - 4{,}5° = 13°$$
$$\frac{b}{c} = \frac{\sin(\beta)}{\sin(\gamma)} \Leftrightarrow b = c \cdot \frac{\sin(\beta)}{\sin(\gamma)} = 440\,m \cdot \frac{\sin(4{,}5°)}{\sin(13°)} \approx 440\,m \cdot 0{,}3488 = 153{,}4645\,m$$

rechtwinkliges Dreieck:

$$\sin(\alpha) = \frac{h}{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{h} = b \cdot \sin(\alpha) = 153{,}4645\,m \cdot \sin(17{,}5°) \approx \mathbf{46{,}1477\,m}$$

A: Der Aussichtsturm ist rund 46 m hoch.

c) Stelle eine allgemeine Formel auf, mit der man die Höhe h des Aussichtsturms berechnen kann. (Also ohne Zahlen, nur mit α, β und c.)

$$\boldsymbol{h} = b \cdot \sin(\alpha) = c \cdot \frac{\sin(\beta)}{\sin(\gamma)} \cdot \sin(\alpha) = c \cdot \frac{\sin(\beta)}{\sin(180° - \alpha' - \beta)} \cdot \sin(\alpha)$$
$$= c \cdot \frac{\sin(\beta)}{\sin(180° - (180° - \alpha) - \beta)} \cdot \sin(\alpha) = c \cdot \frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha - \beta)} \cdot \sin(\alpha) = \boldsymbol{c \cdot \frac{\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)}{\sin(\alpha - \beta)}}$$

<u>**Aufgabe 3:**</u> Gib für die folgenden Funktionen Amplitude, Periode und Phasenverschiebung an:

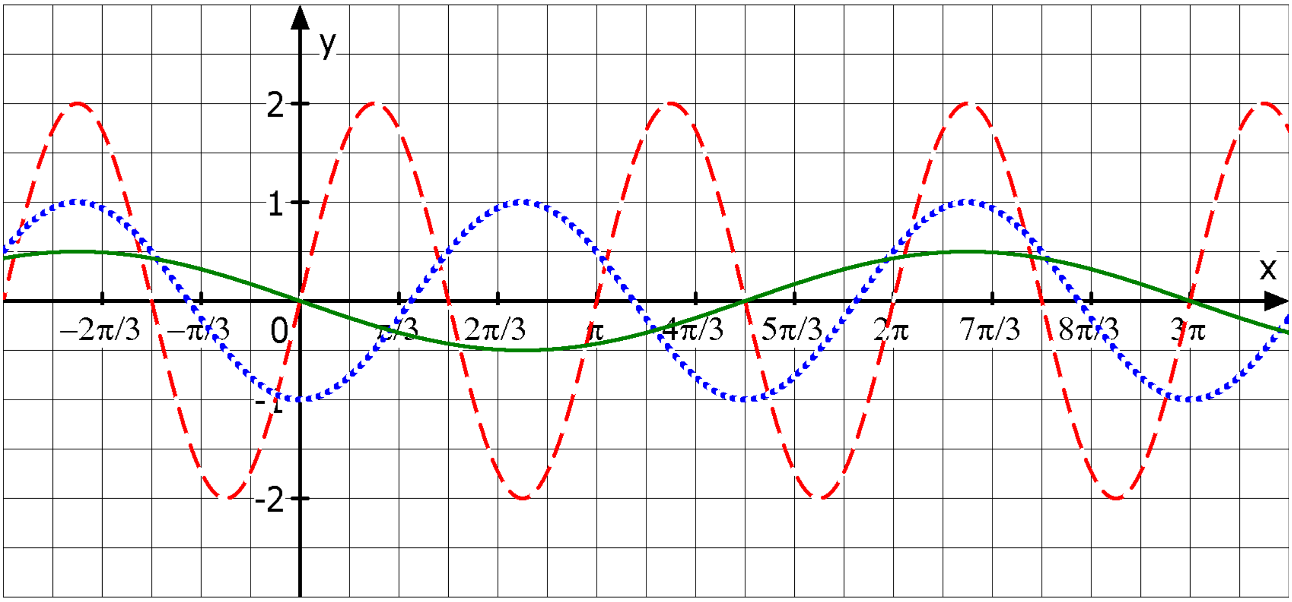
Angegebene Form: $f(x) = a \cdot \sin(bx - e)$ Umwandeln in $f(x) = a \cdot \sin(b(x - c))$ (bzw. mit cos)

mit a: Amplitude, b: Stauchung/Streckung, $p = \frac{2\pi}{b}$: Periode, c: Phasenverschiebung

a) $f(x) = 8\sin(5x)$ $\boldsymbol{a = 8}$ $b = 5 \Rightarrow \boldsymbol{p = \frac{2\pi}{5}}$ $\boldsymbol{c = 0}$	**b)** $f(x) = \frac{\pi}{2} \cdot \sin(2x - 2)$ $= \frac{\pi}{2} \cdot \sin(2(x - 1))$ $\boldsymbol{a = \frac{\pi}{2}}$ $b = 2 \Rightarrow \boldsymbol{p} = \frac{2\pi}{2} = \boldsymbol{\pi}$ $\boldsymbol{c = +1}$	**c)** $f(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}x - \pi\right)$ $= \pi \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right)\right)$ $\boldsymbol{a = 1}$ $b = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \boldsymbol{p} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{3}} = \mathbf{3}$ $\boldsymbol{c = +\frac{3}{2}}$

Mathematik Klasse 10b, 4. Klassenarbeit – Trigonometrie II – Lösung B **16.05.2013**

<u>Aufgabe 4:</u> Folgend sind Graphen der Sinusfunktion in der Form $f(x)=a\cdot\sin(bx-e)$ angegeben. Lies die Periode und die Phasenverschiebung ab und gib für alle Graphen die Funktionsgleichungen in der Form wie oben an.



gestrichelt:	durchgezogen:	gepunktet:
$a=2\ ;\ p=\pi\ ;\ c=0$ $b=\frac{2\pi}{p}=\frac{2\pi}{\pi}=2$ $e=b\cdot c=2\cdot 0=0$ $\boldsymbol{f(x)=2\cdot\sin(2x)}$	$a=0{,}5\ ;\ p=3\pi\ ;\ c=\frac{p}{2}=\frac{3}{2}\pi$ $b=\frac{2\pi}{p}=\frac{2\pi}{3\pi}=\frac{2}{3}$ $e=b\cdot c=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\pi=\pi$ $\boldsymbol{f(x)=0{,}5\cdot\sin\left(\frac{2}{3}x-\pi\right)}$	$a=1\ ;\ p=\frac{3}{2}\pi\ ;\ c=\frac{p}{4}=\frac{3}{8}\pi$ $b=\frac{2\pi}{p}=\frac{2\pi}{\frac{3}{2}\pi}=\frac{4}{3}$ $e=\frac{4}{3}\cdot c=\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{8}\pi=\frac{1}{2}\pi$ $\boldsymbol{f(x)=\sin\left(\frac{4}{3}x-\frac{1}{2}\pi\right)}$