

**Mathematik Klasse 10b, 3. KA – Exp.-funktionen und Trigonometrie I – Lösung A 28.02.2013**

**Aufgabe 1:** Vereinfache die folgenden Terme so weit wie möglich.

a)  $\log_3(27 \cdot 3^a) = \log_3(27) + \log_3(3^a) = 3 + a$

b)  $a^{\frac{\ln(12)}{\ln(a)}} = a^{\log_a(12)} = 12$

c)  $\left( \frac{\log_b(a^c)}{\log_b(a)} + b \right) \cdot (\lg(10^{-b}) + c) = (\log_a(a^c) + b) \cdot (-b + c) = (c + b)(c - b) = c^2 - b^2$

**Aufgabe 2:** Löse die folgenden Exponentialgleichungen.

<p>a) <math>5^{x+1} = 25^4 \quad   \quad T</math>  <math>\Leftrightarrow 5^{x+1} = (5^2)^4 \quad   \quad T</math>  <math>\Leftrightarrow 5^{x+1} = 5^8 \quad   \quad \log_5</math>  <math>\Leftrightarrow x + 1 = 8 \quad   \quad -1</math>  <math>\Leftrightarrow x = 7</math></p>	<p>b) <math>2^{x+1} = 3^{x+1} \quad   \quad \ln</math>  <math>\Leftrightarrow \ln(2^{x+1}) = \ln(3^{x+1}) \quad   \quad T</math>  <math>\Leftrightarrow (x+1) \ln(2) = (x+1) \ln(3)</math>                  An dieser Stelle darf man nicht durch <math>(x+1)</math> teilen, da <math>x+1</math> auch null sein könnte.                  Also: <math>\quad   \quad -(x+1) \cdot \ln(3)</math>  <math>\Leftrightarrow (x+1) \ln(2) - (x+1) \ln(3) = 0</math>  <math>\Leftrightarrow (x+1)(\ln(2) - \ln(3)) = 0 \quad   \quad : \ln\left(\frac{2}{3}\right) \quad \Leftrightarrow (x+1) = 0</math>  <math>\Leftrightarrow x = -1</math></p>
<p>c) <math>16^x - 512 \cdot 2^{2x} + 65536 = 0 \quad   \quad T \quad \text{NR: } 512 \cdot 2^{2x} = 512 \cdot (2^2)^x \quad 16^x = 4^{2x} = 4^x \cdot 4^x = (4^x)^2</math>  <math>(4^x)^2 - 512 \cdot 4^x + 65536 = 0 \quad \text{Substitution } u = 4^x</math>  <math>\Rightarrow u^2 - 512u + 65536 = 0 \quad \text{p-q-Formel:}</math>  <math>u_{1/2} = 256 \pm \sqrt{256^2 - 65536} = 256 \pm \sqrt{(2^8)^2 - 2^{16}} = 256 \pm 0</math>                  Rücksubstitution: <math>u = 4^x \Leftrightarrow x = \log_4(u) = \log_4(256) = 4</math></p>	

**Aufgabe 3:** Ein frisch gezapftes Bier hat eine Schaumkrone von 5 cm Höhe. Alle 30 Sekunden verliert die Schaumkrone 50% ihrer Höhe.

Berechne die Zeit, nach welcher die Schaumkrone noch 5 mm hoch ist.

$$f(t) = c \cdot a^t = 5 \text{ cm} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{30s}} \quad (t \text{ in sek}) \quad f(t_2) = 5 \text{ mm} \quad \text{Gesucht: } t_2$$

Einsetzen:  $0,5 \text{ cm} = 5 \text{ cm} \cdot (2^{-1})^{\frac{t_2}{30s}} \quad | \quad : (5 \text{ cm})$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{10} = 2^{-\frac{1}{30s} \cdot t_2} \quad | \quad \ln$$

$$\Leftrightarrow \ln(10^{-1}) = \ln\left(2^{-\frac{1}{30s} \cdot t_2}\right) \quad | \quad T \quad \Leftrightarrow -\ln(10) = -\frac{1}{30s} \cdot t_2 \cdot \ln(2) \quad | \quad \cdot \left(-\frac{30s}{\ln(2)}\right)$$

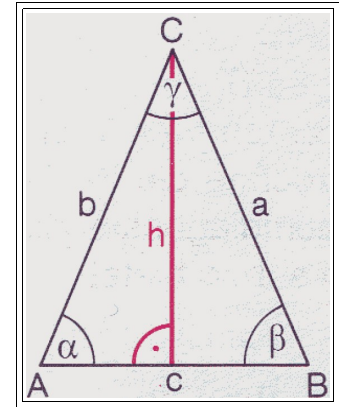
$$30s \cdot \frac{\ln(10)}{\ln(2)} = t_2 \quad \Leftrightarrow \quad t_2 = 99,66 \text{ s} \quad \text{A: Nach rund 100 Sek. ist die Schaumkrone noch 5 mm hoch.}$$

**Aufgabe 4:**

In dem gleichschenkligen Dreieck ABC ist  $a = 45,2 \text{ m}$  und  $\gamma = 98^\circ$ .

Bestimme die Länge  $h$  der Höhe des Dreiecks.

$$\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{h}{a} \Leftrightarrow h = a \cdot \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) = 45,2 \text{ cm} \cdot \cos(49^\circ) = 29,65 \text{ cm}$$



**Aufgabe 5:** Der Tangenswert des Winkels  $\alpha$  beträgt  $\tan(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{6}}$ .

Bestimme durch Umformungen und ohne Berechnung des Winkels den Kosinuswert von  $\alpha$ .

$$\begin{aligned} \tan(\alpha) &= \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \Leftrightarrow \tan(\alpha) = \frac{\sqrt{1 - \cos^2(\alpha)}}{\cos(\alpha)} \Rightarrow \tan^2(\alpha) = \frac{1 - \cos^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} \\ \Rightarrow \frac{1}{6} &= \frac{1 - \cos^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} \Leftrightarrow \cos^2(\alpha) = 6 - 6\cos^2(\alpha) \Leftrightarrow 7\cos^2(\alpha) = 6 \Leftrightarrow \cos^2(\alpha) = \frac{6}{7} \Rightarrow \cos(\alpha) = \sqrt{\frac{6}{7}} \end{aligned}$$

**Aufgabe 6:**

*Das deutsche Eck in Koblenz*

Die Mosel ist mit insgesamt 544 km nach der Maas der zweitlängste Nebenfluss des Rheins. Sie entspringt am Col de Bussang auf 715 Meter über Meereshöhe. In Deutschland fließt sie von Trier (124 m ü. NN) bis Koblenz (65 m ü. NN), wo sie in den Rhein mündet.

a) Berechne die durchschnittliche Steigung der Mosel in Prozent.

$$\text{Höhenunterschied } h = 715 \text{ m} - 65 \text{ m} = 650 \text{ m}$$

$$\text{Steigungswinkel } \sin(\alpha) = \frac{650 \text{ m}}{544000 \text{ m}} = 0,001949 \Rightarrow \alpha = 0,06846^\circ \Rightarrow \tan(\alpha) = 0,001195 = 0,1195\%$$

**A: Die durchschnittliche Steigung beträgt 0,12%.**

b) Der durchschnittliche Steigungswinkel zwischen Trier und Koblenz beträgt  $0,01397^\circ$ . Berechne die Länge der Mosel zwischen Trier und Koblenz.

$$\text{Höhe } h, \text{ Länge } l \quad h = 124 \text{ m} - 65 \text{ m} = 59 \text{ m} \quad \sin(\alpha) = \frac{h}{l} \Leftrightarrow l = \frac{h}{\sin(\alpha)} = 241,9793 \text{ km}$$

**A: Die Mosel zwischen Trier und Koblenz ist 242 km lang.**