Mathematik GK m3, 1. Kl. – Integrieren / Gebr. rat. Funktionen – Lösung 02.11.2011

Aufgabe 1: Integrieren

Berechne die folgenden Flächeninhalte:

1.1 Die Fläche zwischen dem Graphen von $f(x)=x^2$ und der x-Achse im Intervall $[0;3]$

$$\boldsymbol{A}=\int_0^3 x^2\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^3=\frac{1}{3}3^3-\frac{1}{3}0^3=9-0=\mathbf{9}$$

1.2 Die Fläche zwischen dem Graphen von $f(x)=x^3$ und der x-Achse im Intervall $[-1;2]$

$$A_1=\int_{-1}^0 -x^3\,dx=\left[-\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^0=-\frac{1}{4}0^4-\left(-\frac{1}{4}(-1)^4\right)=\frac{1}{4}$$

$$A_1=\int_0^2 x^3\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^2=\frac{1}{4}2^4-\frac{1}{4}0^4=4$$

$$\boldsymbol{A}=A_1+A_2=\frac{1}{4}+4=\mathbf{4{,}25}$$

1.3 Die Fläche zwischen den Graphen von $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2$ und von $g(x)=-\frac{1}{2}x+4$ im Intervall $[1;4{,}5]$

Bilde die Differenzfunktion: $h(x)=f(x)-g(x)=\frac{1}{2}x^2-2-\left(-\frac{1}{2}x+4\right)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-6$

Nullstellen: $0=\frac{1}{2}x_n^2+\frac{1}{2}x_n-6 \quad | \cdot 2$

$0=x_n^2+x_n-12$ mit p-q-Formel: $x_{1/2}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+12}=-\frac{1}{2}\pm 3{,}5 \Rightarrow x_1=-4 \;;\; x_2=3$

Die erste Nullstelle liegt außerhalb des betrachteten Intervalls.

$$h(1)=\frac{1}{2}\cdot 1^2+\frac{1}{2}\cdot 1-6<0$$

$$A_1=\int_1^3 -h(x)\,dx=\left[-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{4}x^2+6\text{x}\right]_1^3=-\frac{1}{6}3^3-\frac{1}{4}3^2+6\cdot 3-\left(-\frac{1}{6}1^3-\frac{1}{4}1^2+6\cdot 1\right)$$
$$=-\frac{27}{6}-\frac{9}{4}+18+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}-6=-\frac{26}{6}-\frac{8}{4}+12=-\frac{13}{3}+\frac{30}{3}=\frac{17}{3}$$
$$A_2=\int_3^{4{,}5} h(x)\,dx=\left[\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{4}x^2-6\text{x}\right]_3^{4{,}5}=\frac{1}{6}4{,}5^3+\frac{1}{4}4{,}5^2-6\cdot 4{,}5-\left(\frac{1}{6}3^3+\frac{1}{4}3^2-6\cdot 3\right)=4{,}5$$

$$A=A_1+A_2=\frac{34}{6}+\frac{27}{6}=\frac{61}{6}=10\frac{1}{6}$$

<u>Aufgabe 2:</u> Ableitungsregeln

Bestimme die Ableitungsfunktion der Funktion *f*. Vereinfache den Funktionsterm der Ableitung so weit wie möglich.

2.1 $f(x)=(x+2)^2 \quad =x^2+4x+4$ $\boldsymbol{f'(x)=2x+4}$	**2.2** $f(x)=\sin\left(\frac{1}{2}x^2+4\right)$ Kettenregel mit $u(x)=\sin(x)\ ;\ v(x)=0{,}5x^2+4$ $\boldsymbol{f'(x)=x\cdot\cos(0{,}5x^2+4)}$
2.3 $f(x)=\tan(x)$ Umformen: $f(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ Quotientenregel: $u(x)=\sin(x)\ ;\ v(x)=\cos(x)$	$\boldsymbol{f'(x)}=\frac{\cos(x)\cos(x)-(-\sin(x))\sin(x)}{\cos^2(x)}$ $=\frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}=\boldsymbol{\frac{1}{\cos^2(x)}}$

<u>Aufgabe 3:</u> Gebrochen rationale Funktionen

<u>3.1.</u> Bestimme den Definitonsbereich und die Polstellen der folgenden Funktionen:

3.1.1 $f(x)=\frac{x+2}{x-4}$ $D=\mathbb{R}\setminus\{4\}$ Polstelle: $x_0=4,$ da nicht hebbare Definitionslücke.	**3.1.2** $f(x)=\frac{x^2-2}{x^2-x-6}$ Nullstellen des Nenners: $0=x_n^2-x_n-6$ p-q-Formel: $x_{1/2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+6}=\frac{1}{2}\pm 2{,}5 \Rightarrow x_1=-2\ ;\ x_2=3$ NST des Zählers: $x_{1/2}=\pm\sqrt{2}$, also $D=\mathbb{R}\setminus\{-2;3\}$ und Polstellen $x_1=-2\ ;\ x_2=3$, da nicht hebbare Definitionslücken.

3.1.3 $f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x^2+5x-6}$

Nullstellen des Nenners:

$0=x_n^2+5x_n-6$

p-q-Formel:

$x_{1/2}=-2{,}5\pm\sqrt{6{,}25+6}=-2{,}5\pm3{,}5$
$\Rightarrow\ x_1=-6\ ;\ x_2=1$

Zähler: $x^2-2x+1=(x-1)^2$

Also: $f(x)=\frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+6)}$

$x_2=1$ ist also eine hebbare Definitionslücke.

$D=\mathbb{R}\setminus\{-6\,;1\}$

Polstellen: $x_1=-6$

3.2. Bestimme die Gleichungen aller Assymptoten (waagerecht, senkrecht, schief) der folgenden Funktionen:

3.2.1 $f(x)=\frac{x+2}{x^2-4}$

senkrecht (Polstellen): $x=+2$, denn die NST des Nenners sind $x_{1/2}=\pm2,$ aber bei $x_1=-2$ ist eine hebbare Defnitionslücke.

waagerecht: $y=0,$ da Nenner höherer Grad als Zähler hat.

3.2.2 $f(x)=\frac{x^2-2}{x+2}$

$(x^2-2):(x+2)=x-2$ Rest 2
x^2+2x
$-2x-2$
$-2x-4$
2

$f(x)=x-2+\frac{2}{x+2}$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=x-2$

schiefe Assymptote: $g(x)=x-2$

senkrechte Assymptote: $x=-2$

3.2.3 $f(x)=\frac{4x^2-2x+4}{2x^2-4x-6}$ kürzen

$f(x)=\frac{2x^2-x+2}{x^2-2x-3}$

Nullstellen des Zählers (zur Überprüfung auf hebbare Definitionslücken):

$0=2x_n^2-x_n+2\quad |\ :2$

$0=x_n^2-\frac{1}{2}x_n+1$

$x_{1/2}=\frac{1}{4}\pm\sqrt{\frac{1}{16}-1}\quad\Rightarrow$ keine NST

Nullstellen des Nenners:

$0=x_n^2-2x_n-3$

$x_{1/2}=1\pm\sqrt{1+3}\ \Rightarrow\ x_1=-1\ ;\ x_2=3$

senkrechte Assymptoten: $x_1=-1\ ;\ x_2=3$

waagerechte Assymptote: $y=2$

<u>**3.3.**</u> Gegeben ist die Funktion $f(x)=\frac{x^3-8}{x^2-4}$

<u>**3.3.1**</u> Bestimme die Nullstellen der Funktion.

NST der Funktion = NST des Zählers

$0=x_n^3-8 \Leftrightarrow x_n=2$, aber 2 ist auch NST des Nenners. Also ist $x_n=2$ eine hebbare Definitionslücke und keine Nullstelle.

<u>**3.3.2**</u> Bestimme das Verhalten der Funktion an den Polstellen und für $x\to\pm\infty$

Nullstellen des Nenners: $x_{1/2}=\pm 2$

$x=+2$ ist eine hebbare Defintionslücke.

Also ist $x_1=-2$ die einzige Polstelle und somit senkrechte Assymptote.

Verhalten an der Polstelle: $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} f(x)=-\infty \qquad \lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} f(x)=+\infty$

Verhalten für $x\to\pm\infty$ $(x^3-8):(x^2-4)=x$ Rest $4x-8$ x^3-4x ——————— $4x-8$	Also $f(x)=x+\frac{4x-8}{x^2-4}=x+\frac{\frac{4}{x}-\frac{8}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}}$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=x$ Also schiefe Assymptote: $y=x$

<u>**3.3.3**</u> Bestimme die Extrempunkte der Funktion.

Quotietenregel: $f'(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2}$

$$f'(x)=\frac{3x^2(x^2-4)-(x^3-8)2x}{(x^2-4)^2}=\frac{3x^4-12x^2-2x^4+16x}{(x^2-4)^2}=\frac{x^4-12x^2+16x}{(x^2-4)^2}$$

NST der Ableitung = NST des Zählers

$0=x_n^4-12x_n^2+16x_n$

$\Leftrightarrow 0=x(x_n^3-12x_n+16)$ Damit ist $x_1=0$ die erste NST.

Betrachte Klammer:

$0=x_n^3-12x_n+16$ Zweite NST: $x_2=2$ durch Raten, denn $2^3-12\cdot 2+16=0$

$$
\begin{array}{l}
(x^3-12x+16):(x-2)=x^2+2x-8 \\
x^3-2x^2 \\
\hline
\quad 2x^2-12x+16 \\
\quad 2x^2-4x \\
\hline
\qquad -8x+16 \\
\qquad -8x+16 \\
\hline
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Weitere Nullstellen:

$$0=x_n^2+2x_n-8$$
$$x_{3/4}=-1\pm\sqrt{1+8}=-1\pm3 \;\Rightarrow\; x_3=-4 \;;\; x_4=x_2=2$$

$x_2=2$ kann keine Extremstelle sein, da hier eine hebbare Definitionslücke der Funktion ist.

$f'(-6)=0{,}75>0$
$f'(-1)=-3<0$ VZW von + nach -, also Maximum bei $x_3=-4$
$f'(1)=0{,}556>0$ VZW von - nach +, also Minimum bei $x_1=0$

$f(-4)=-6,$ also **Maximum** bei $\mathbf{(-4|-6)}$
$f(0)=2,$ also **Minimum** bei $\mathbf{(0|2)}$

<u>**3.3.4**</u> Skizziere die Funktion. (Tipp: Achsen von -10 bis +10).