**Mathematik GK m3, 1. Kl. – Funktionen / Differentialrechung – Lösung B    19.11.2010**

**Aufgabe 1:**

**a)** Bestimme $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{a+5}{a+6}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+\dfrac{5}{a}}{1+\dfrac{6}{a}}\right)=\dfrac{1+0}{1+0}=\mathbf{1}$

**b)** Berechne $(2x^2+4x+2):(x+1)$

$$\begin{array}{l}
(2x^2+4x+2):(x+1)=\mathbf{2x+2}\\
\;\;2x^2+2x\\
\hline
\qquad\quad 2x+2\\
\qquad\quad 2x+2\\
\hline
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

**Aufgabe 2:**

Gegeben ist $f(x)=4x^2$. Es sei $x_0=2$.

**a)** Berechne den Differenzenquotienten von *f(x)* zwischen den Stellen $x_1=1$ und $x_2=4$.

$$\boldsymbol{m}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{4\cdot 4^2-4\cdot 1^2}{4-1}=\frac{60}{3}=\mathbf{20}$$

**b)** Berechne $f'(x_0)$ mit der "x-Methode".

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{4x^2-(4\cdot 2^2)}{x-2}=\lim_{x\to x_0}\frac{4x^2-16}{x-2}$$

Neberechnung Polynomdivision:

$$\begin{array}{l}
(4x^2\qquad -16):(x-2)=4x+8\\
\;4x^2-8x\\
\hline
\qquad\; 8x-16\\
\qquad\; 8x-16\\
\hline
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Also $\boldsymbol{f'(x_0)}=\lim\limits_{x\to x_0}4x+8=4\cdot 2+8=\mathbf{16}$

**c)** Berechne $f'(x_0)$ mit der "h-Methode".

$$\boldsymbol{f'(x_0)}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4\cdot(2+h)^2-(4\cdot 2^2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{4\cdot(4+4h+h^2)-16}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{16+16h+4h^2-16}{h}=\lim_{h\to 0}16+4h=16+0=\mathbf{16}$$

**d)** Stelle die Gleichung der Tangenten von *f(x)* am Punkt $P_0(x_0|f(x_0))$ auf.

Die Steigung der Tangenten durch $P_0(x_0|f(x_0))$ ist gleich dem Differentialquotienten an der Stelle $x_0$. Den haben wir schon in Aufgabe a) und b) berechnet.

$m_t = f'(2) = 16$

$f(x_0) = 4 \cdot 2^2 = 16$ , also ist $P_0(3|16)$

Einsetzen von $P_0$ und $m_t$ in die lineare Funktionsgleichung $f(x) = mx + n$

$16 = 16 \cdot 2 + n$ | -36
$\Leftrightarrow -20 = n$

Die Funktionsgleichung lautet also $\boldsymbol{f(x) = 16x - 20}$

**Aufgabe 3:**

Gegeben sind die drei Funktionen *f*, *g* und *h*.
f(x) ist ein Polynom 1. Grades, *g(x)* ein Polynom 2. Grades und *h(x)* ein Polynom 3. Grades.
Die Punkte ***$P_1$(2|2)*** und ***$P_2$(5|-4)*** liegen auf dem Graphen von ***f(x)***.
Die Punkte ***$P_3$(-3|-8)***, ***$P_4$(3|4)*** und ***$P_5$(7|-8)*** liegen auf dem Graphen von ***g(x)***.
*h(x)* hat die Funktionsgleichung $\boldsymbol{h(x) = -x^3 + 7x^2 - 7x - 15}$. Eine Nullstelle liegt bei $\boldsymbol{x_1 = 5}$.

*Aufgaben für f(x):*
**a)** Zeige mit einer Rechnung, dass für *f* die Funktionsgleichung $f(x) = -2x + 6$ ist.

Entweder beide Punkte einsetzen und 2er-LGS lösen oder

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{-4-2}{5-2} = \frac{-6}{3} = -2$ und

Einsetzen von $P_1$ und m in die lineare Funktionsgleichung $f(x) = mx + n$

$2 = -2 \cdot 2 + n$ | +4
$\Leftrightarrow 6 = n$

Also $\boldsymbol{f(x) = -2x + 6}$

**b)** Berechne alle Nullstellen von *f(x)*.

Es gilt $f(x_n) = 0$ , also gleich null setzen

$-2x_n + 6 = 0$ | -6
$\Leftrightarrow -2x_n = -6$ | :2
$\Leftrightarrow \boldsymbol{x_n = 3}$

**Mathematik GK m3, 1. Kl. – Funktionen / Differentialrechung – Lösung B 19.11.2010**

*Aufgaben für g(x):*
**c)** Zeige mit einer Rechnung, dass für *g* die Funktionsgleichung $g(x)=0,5x^2-2\mathrm{x}-2,5$ ist.

***$P_3$(-3|-8); $P_4$(3|4); $P_5$(7|-8)***

Einsetzen der drei bekannten Punkte in die allgemeine Funktionsgleichung $g(x)=ax^2+bx+c$

I. $-8=a\cdot(-3)^2+b\cdot(-3)+c$
II. $4=a\cdot(3)^2+b\cdot(3)+c$
III. $-8=a\cdot(7)^2+b\cdot(7)+c$

I. $-8=9a-3b+c$ | I. - II.
II. $4=9a+3b+c$
III. $-8=49a+7b+c$ | III. - II.

Ia. $-12=-6b$ | : (-6)
$\Leftrightarrow \boldsymbol{b=2}$
IIIa. $-12=40a+4b$

Setze $b=2$ in IIIa. ein:

IIIa. $-12=40a+4\cdot(2)$ | -8
$\Leftrightarrow -20=40\mathrm{a}$ | :40
$\Leftrightarrow \boldsymbol{-0,5=a}$

Setze $a=-0,5$ und $b=2$ in I. ein:

I. $-8=9\cdot(-0,5)-3\cdot 2+c$
$\Leftrightarrow -8=-10,5+c$ | +10,5
$\Leftrightarrow \boldsymbol{2,5=c}$

Eingesetzt in die Funktionsgleichung: $\boldsymbol{g(x)=-0,5x^2+2\mathrm{x}+2,5}$

**d)** Berechne alle Nullstellen von *g(x)*.

Es gilt $g(x_n)=0$ , also gleich null setzen

$-0,5x_n^2+2x_n+2,5=0$ | $\cdot(-2)$
$\Leftrightarrow x_n^2-4x_n-5=0$ Anwenden der p-q-Formel
$x_{1/2}=2\pm\sqrt{2^2+5}=2\pm 3$ $\Rightarrow \boldsymbol{x_1=-1, x_2=5}$

**Die Nullstellen liegen bei $\boldsymbol{x_1=-1}$ und $\boldsymbol{x_2=5}$.**

**e)** Berechne die Schnittpunkte von *f(x)* und *g(x)*.

Für den Schnittpunkt $S(x_s|y_s)$ gilt: $f(x_s)=g(x_s)$, also muss man die Funktionen gleich setzen

$$-2x_s+6=-0,5\,x_s^2+2\,x_s+2,5 \quad | \quad +0,5\,x_s^2-2\,x_s-2,5$$

$$\Leftrightarrow 0,5\,x_s^2-4\,x_s+3,5=0 \quad | \quad \cdot 2$$
$$\Leftrightarrow x_s^2-8\,x_s+7=0 \qquad \text{Anwenden der p-q-Formel}$$

$$x_{1/2}=4\pm\sqrt{4^2-7}=4\pm\sqrt{16-7}=4\pm\sqrt{9}=4\pm 3 \qquad \Rightarrow x_1=7\ ;x_2=1$$

Berechnung der y-Koordinaten der Schnittpunkte durch Einsetzen der x-Koordinaten in eine der beiden Funktioen.

$$y_1=g(x_1)=-2\cdot 7+6=-14+6=-8 \qquad y_2=g(x_2)=-2\cdot 1+6=-2\,4\,6=4$$

Die Schnittpunkte sind $\boldsymbol{S_1(1|4)}$ und $\boldsymbol{S_2(7|-8)}$.

**f)** Berechne die Ableitung von *g(x)* an der Stelle $x_0=2$, also $g'(2)$. Benutze eine Methode deiner Wahl.

$$g(x)=-0,5\,x^2+2x+2,5$$

1. Möglichkeit: x-Methode

$$g'(3)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{-0,5\,x^2+2\,x+2,5-(-0,5\cdot 2^2+2\cdot 2+2,5)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{-0,5\,x^2+2\,x-2}{x-2}$$

Nebenrechnung Polynomdivision:

$$(-0,5x^2+2x-2):(x-2)=0,5\,x+1$$
$$0,5\,x^2+1\,x$$
$$x-2$$
$$x-2$$
$$0$$

Also $\boldsymbol{g'(2)}=\lim_{x\to 2}-0,5\,x+1=-0,5\cdot 2+1=-1+1=\mathbf{0}$

1. Möglichkeit: h-Methode

$$\boldsymbol{g'(2)}=\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-0,5\cdot(2+h)^2+2\cdot(2+h)+2,5-\left(-0,5\cdot 2^2+2\cdot 2+2,5\right)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{-0,5\cdot(4+4h+h^2)+4+2h-2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-2-2h-0,5\,h^2+2+2h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0,5\,h^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}0,5\,h=0,5\cdot 0=\mathbf{0}$$

**g)** Berechne die übrigen Nullstellen von *h(x)*. $h(x) = -x^3 + 7x^2 - 7x - 15$ ; $x_1 = 5$

Die Nullstellen sind die Lösung der Gleichung: $-x_n^3 + 7x_n^2 - 7x_n - 15 = 0$ Berechne:

$$
\begin{array}{l}
(-x^3 + 7x^2 - 7x - 15) : (x - 5) = -x^2 + 2x + 3 \\
\underline{-x^3 + 5x^2 \qquad\qquad} \\
\qquad 2x^2 - 7x - 15 \\
\qquad \underline{2x^2 - 10x \qquad} \\
\qquad\qquad 3x - 15 \\
\qquad\qquad \underline{3x - 15} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Also kann man h(x) auch in der Form $h(x) = (x - 5) \cdot (-x^2 + 2x + 3)$ schreiben.

$(x_n - 5) \cdot (-x_n^2 + 2x_n + 3) = 0$ Betrachte nur noch die zweite Klammer.

$-x_n^2 + 2x_n + 3 = 0 \quad | \quad \cdot(-1)$
dlrarrow $x_n^2 - 2x_n - 3 = 0$

Anwenden der p-q-Forme $x_{2/3} = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm \sqrt{4} = 1 \pm 2$ $\Rightarrow \mathbf{x_2 = -1\ ;\ x_3 = +3}$

**Die weiteren Nullstellen liegen bei $x_2 = -1$ und $x_3 = 3$.**