Mathematik Klasse 9d, 4. Klassenarbeit – Parabeln – Lösung A **01.03.2011**

Aufgabe 1: *8 Punkte (4 + 4)*

Berechne den Scheitelpunkt und die Nullstellen der folgenden quadratischen Funktionen

a) Scheitelpunkt: $f(x)=0{,}5x^2-3x+4$ $=0{,}5(x^2-6x)+4$ $=0{,}5(x^2-6x+9-9)+4$ $=0{,}5[(x-3)^2-9]+4$ $=0{,}5(x-3)^2-4{,}5+4$ $=0{,}5(x-3)^2-0{,}5 \quad \Rightarrow \boldsymbol{S(3\|-0{,}5)}$ Nullestellen: Funktion gleich null setzen $0=0{,}5(x_n-3)^2-0{,}5 \quad \| +0{,}5$ $\Leftrightarrow 0{,}5=0{,}5(x_n-3)^2 \quad \| \cdot 2$ $\Leftrightarrow 1=(x_n-3)^2 \quad \| \sqrt{}$ $\Leftrightarrow \pm 1=x_{n1/2}-3 \quad \| +3$ $\Rightarrow \boldsymbol{x_{n1}=2 \;;\; x_{n2}=4}$	**b)** Scheitelpunkt: Erst ausmultiplizieren für die allgemeine Form $f(x)=(x-2)(x+4)$ $=x^2+2x-8$ $=x^2+2x+1-1-8$ $=(x+1)^2-9 \quad \Rightarrow \boldsymbol{S(-1\|-9)}$ Nullestellen können einfach abgelesen werden: $\boldsymbol{x_{n1}=-4 \;;\; x_{n2}=2}$

Aufgabe 2: *6 Punkte*

Gegeben sind drei Punkte A(-2|-8), B(1|2) und C(10|-4) auf dem Graphen einer Parabel.

Berechne die Funktionsgleichung der Parabel.

Einsetzen der drei Punkte in die allgemeine Funktionsgleichung $f(x)=ax^2+bx+c$ ergibt drei Gleichungen. Dieses Gleichungssystem wird gelöst.

I. $-8=a\cdot(-2)^2+b\cdot(-2)+c$ II. $2=a\cdot 1^2+b\cdot 1+c$ III. $-4=a\cdot 10^2+b\cdot 10+c$ I. $-8=4a-2b+c$ | I.-II. II. $2=a+b+c$ III. $-4=100a+10b+c$ | III.-II. Ia. $-10=3a-3b$ | $\cdot 3$ IIIa. $-6=99a+9b$ Ia. $-30=9a-9b$ | IIIa. + Ia. IIIa. $-6=99a+9b$ Ib. $-36=108a$ | $:108$ $\Leftrightarrow \boldsymbol{-\frac{1}{3}=a}$	Setze $a=-\frac{1}{3}$ in Ia. ein: Ia. $-10=3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)-3b$ | + 3b + 10 $\Leftrightarrow 3b=9$ | $:3$ $\Leftrightarrow \boldsymbol{b=3}$ Setze $a=-\frac{1}{3}$ und $b=3$ in II. ein: II. $2=\left(-\frac{1}{3}\right)+3+c$ $\Leftrightarrow \frac{6}{3}=\frac{8}{3}+c$ | $-\frac{8}{3}$ $\Leftrightarrow \boldsymbol{-\frac{2}{3}=c}$

Die Funktionsgleichung lautet: $\boldsymbol{f(x)=-\frac{1}{3}x^2+3x-\frac{2}{3}}$

Mathematik Klasse 9d, 4. Klassenarbeit – Parabeln – Lösung A **01.03.2011**

Aufgabe 3: *5 Punkte*

Berechne alle Schnittpunkte der beiden Funktionen

$f(x)=-\frac{1}{5}x^2-\frac{1}{5}x+10$ und $h(x)=x^2-5x+4$

Gleichsetzen zur Berechnung der x-Koordinate x_s des Schnittpunkts:

$-\frac{1}{5}x_s^2-\frac{1}{5}x_s+10=x_s^2-5x_s+4 \quad \vert \quad -4$ $\Leftrightarrow -\frac{1}{5}x_s^2-\frac{1}{5}x_s+6=x_s^2-5x_s \quad \vert \quad \cdot 5$ $\Leftrightarrow -x_s^2-x_s+30=5x_s^2-25x_s \quad \vert \quad +x^2+x-30$ $\Leftrightarrow 0=6x_s^2-24x_s-30 \quad \vert \quad :6$ $\Leftrightarrow 0=x_s^2-4x_s-5$	$\Leftrightarrow 0=x_s^2-4x_s+4-4-5$ $\Leftrightarrow 0=(x_s-2)^2-9 \quad \vert \quad +9$ $\Leftrightarrow 9=(x_s-2)^2 \quad \vert \quad \sqrt{}$ $\Leftrightarrow \pm 3=x_s-2 \quad \vert \quad +2$ $\Rightarrow x_{s1}=-1 \;;\; x_{s2}=5$

Berechnung der y-Koordinaten durch Einsetzen der x-Koordinaten in eine der beiden Funktionsgleichungen:

$$h(x_{s1})=(-1)^2-5\cdot(-1)+4=1+5+4=10 \quad \Rightarrow \boldsymbol{S_1(-1|10)}$$
$$h(x_{s2})=5^2-5\cdot 5+4=25-25+4=4 \quad \Rightarrow \boldsymbol{S_2(5|4)}$$

Aufgabe 4: *6 Punkte*

In Grönland lebt ein Stamm mathematisch begabter Inuit. Diese bauen ihre Iglus grundsätzlich parabelförmig (im Querschnitt betrachtet). Der beste Baumeister des Stammes bekommt nun einen Bauauftrag für ein Gemeinschaftsiglu. Er hat folgende Vorgaben zu beachten:
- Am Boden muss der Abstand von Wand zu Wand 4 Meter betragen.
- 0,5 Meter von der Wand entfernt muss das Iglu bereits 1,75 Meter hoch sein.

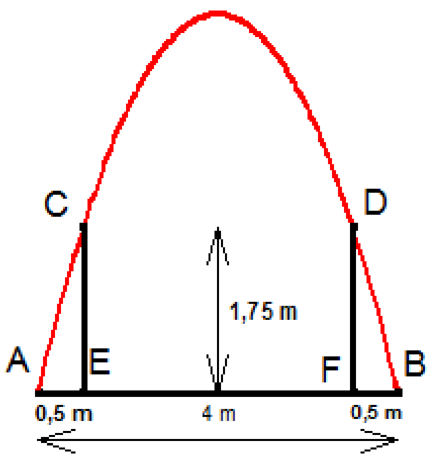
Hilf dem Baumeister und berechne eine Funktionsgleichung, nach der er das Iglu bauen kann.

Die Funktion hängt von der Wahl des Ursprungs des Koordinatensystems ab.

Hier sind nur Ergebnisse für Koordinatensysteme angegeben, die in der Arbeit auch benutzt wurden.

A: $f(x)=-x^2+4x$

Mitte zwischen E und F: $f(x)=-x^2+4$

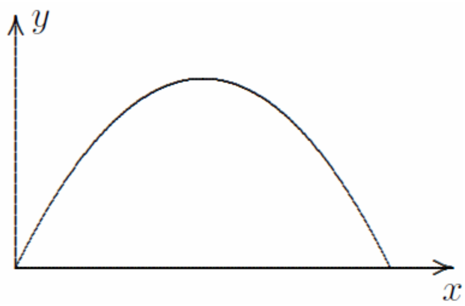


<u>Aufgabe 5:</u> *6 Punkte*

Der Sprung eines Frosches wird durch die Parabel

$$y=-\frac{1}{30}x^2+2\mathrm{x}$$

(Sprungweite x, Höhe y, *in cm*) beschrieben.



Berechne, wie weit und wie hoch der Frosch springt.

Berechung der Höhe durch Bestimmung des Scheitelpunkts. Die y-Koordinate des Scheitelpunkts ist die Höhe.

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{30}x^2+2\mathrm{x} \\ &= -\frac{1}{30}(x^2-60\mathrm{x}) \quad \text{| quadratische Ergänzung} \\ &= -\frac{1}{30}(x^2-60\mathrm{x}+900-900) \\ &= -\frac{1}{30}\left[(x-30)^2-900\right] \quad \text{| ausmultiplizieren} \\ &= -\frac{1}{30}(x-30)^2+30 \end{aligned}$$

Der Scheitelpunkt hat also die Koordinaten S(30|30).

Berechnung der Sprungweite durch Bestimmung der Nullstellen. Der Abstand beiden Nullstellen ist die Sprungweite *w*.

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{30}(x_n-30)^2+30 && | \quad -30 \\ -30 &= -\frac{1}{30}(x_n-30)^2 && | \quad \cdot(-30) \\ 900 &= (x_n-30)^2 && | \quad \sqrt{} \\ \pm 30 &= x_{n1/2}-30 && | \quad +30 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_{n1}=0 \;\; ; \;\; x_{n2}=60$$

$$w=xn_2-x_{n1}=60-0=60$$

(Alternativ ist auch eine Symmetriebetrachung zulässig. Eine Parabel ist achsensysmmetrisch zur Senkrechten durch den Scheitelpunkt. Die x-Koordinate des Scheitelpunktes ist also die halbe Strecke).

A: Der Frosch springt 60 cm weit und 30 cm hoch.