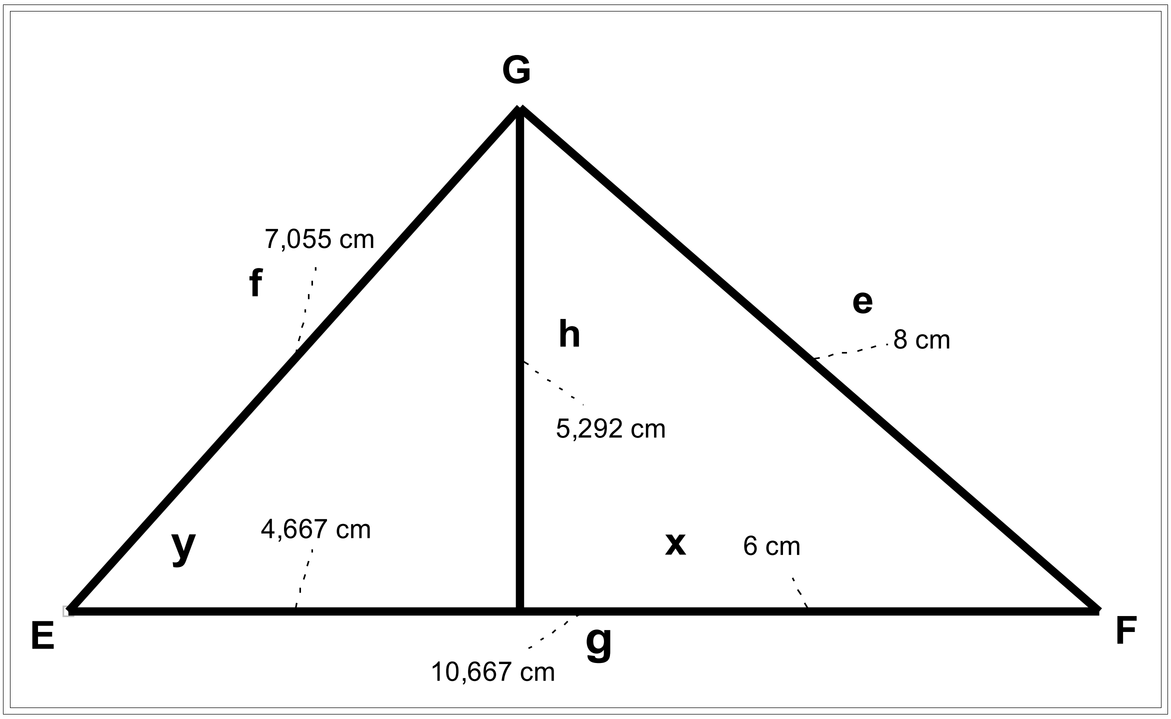
Mathematik Klasse 9d, 3. Klassenarbeit – Pythagoras – Lösung B 14.12.2010

Aufgabe 1: *8 Punkte (4 + 4)*

Berechne die Lösungsmenge der folgenden Wurzelgleichungen.

a) $\sqrt{2x-3}-5=0 \quad \mid +5$	**b)** $\sqrt{4x^2+5}=2x-1 \quad \mid^2$
$\Leftrightarrow \sqrt{2x-3}=5 \quad \mid^2$	$\Rightarrow 4x^2+5=4x^2-4x+1 \quad \mid -4x^2$
$\Rightarrow 2x-3=25 \quad \mid +3$	$\Leftrightarrow 5=-4x+1 \quad \mid -1$
$\Leftrightarrow 2x=28 \quad \mid :2$	$\Leftrightarrow 4=-4x \quad \mid :(-4)$
$\Leftrightarrow x=14$	$\Leftrightarrow -1=x$ Probe:
Probe: $\sqrt{2\cdot 14-3}-5=0$	$\sqrt{4\cdot(-1)^2+5}=2\cdot(-1)-1$
$\Leftrightarrow \sqrt{25}-5=0$	$\Leftrightarrow \sqrt{9}=-2-1$
$\Leftrightarrow \sqrt{5}-5=0$ Probe o.k.	$\Leftrightarrow 3=-3$ Probe nicht o.k.
L = {14}	**L = { }**

Aufgabe 2: *8 Punkte*



Gegeben ist das rechtwinklige Dreieck EFG mit der Hypotenuse g und den Hypotenusenabschnitten y und x.

Berechne alle fehlenden Strecken (also f, g, hund y), wenn
$e=8\,cm$ und $x=6\,cm$.

Mathematik Klasse 9d, 3. Klassenarbeit – Pythagoras – Lösung B **14.12.2010**

Hinweise:

1. Dieser Lösungsweg ist nicht der einzig mögliche. Sowohl die Reihenfolge als auch die angewendeten Formeln können variieren.

2. Nur, wenn man mit den exakten Zwischenergebnissen weiter rechnet (also z.B. mit $\sqrt{28}\,cm$ statt mit 5,29 cm) erhält man fehlerfreie Ergebnisse für die übrigen Längen.

<u>Berechnung von h:</u> Betrachte das rechtwinklige Dreieck mit den Seiten x,e,h. Pythagoras:

$$e^2=x^2+h^2 \quad \Leftrightarrow \quad h^2=e^2-x^2$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{h}=\sqrt{e^2-x^2}=\sqrt{(8\,cm)^2-(6\,cm)^2}=\sqrt{64\,cm^2-36\,cm^2}=\sqrt{28}\,cm=2\sqrt{7}\,cm\approx\mathbf{5{,}29\,cm}$$

<u>Berechnung von y:</u> Höhensatz: $h^2=y\cdot x$

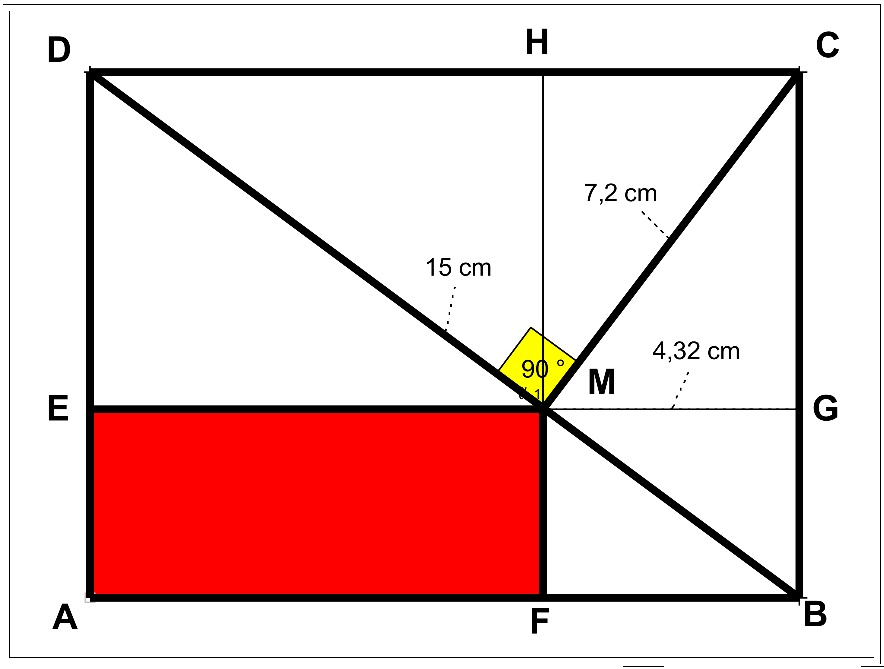
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{y}=\frac{h^2}{x}=\frac{\left(\sqrt{28}\,cm\right)^2}{6\,cm}=\frac{28\,cm^2}{6\,cm}=\frac{14}{3}\,cm\approx\mathbf{4{,}67\,cm}$$

<u>Berechnung von g:</u> $\boldsymbol{g}=y+x=\frac{14}{3}\,cm+6\,cm=\frac{32}{3}\,cm\approx\mathbf{10{,}67\,cm}$

<u>Berechnung von f:</u> Pythagoras: $g^2=e^2+f^2 \quad \Leftrightarrow \quad f^2=g^2-e^2$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{f}=\sqrt{g^2-e^2}=\sqrt{\left(\frac{32}{3}\,cm\right)^2-(8\,cm)^2}=\sqrt{\frac{1024}{9}\,cm^2-64\,cm^2}=\sqrt{\frac{448}{9}\,cm^2}=8\frac{\sqrt{7}}{3}\,cm\approx\mathbf{7{,}06\,cm}$$

<u>Aufgabe 3:</u> 8 *Punkte (2 + 3 + 3)*



Gegeben das Rechteck ABCD mit den Maßen $\overline{AB}=12\,cm$ und $\overline{AD}=9\,cm.$
Berechne:

Mathematik Klasse 9d, 3. Klassenarbeit – Pythagoras – Lösung B **14.12.2010**

Hinweis: Auch hier gibt es wieder alternative Lösungswege.

a) die Diagonale $\overline{BD}$

$$\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{AD}^2$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\overline{BD}}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{AD}^2}=\sqrt{(12\,cm)^2+(9\,cm)^2}=\sqrt{144\,cm^2+81\,cm^2}=\sqrt{225\,cm^2}=\mathbf{15\,cm}$$

b) die Strecke $\overline{CM}$

Zunächst Berechnung der Strecke $\overline{MB}$, welche ein Hypotenusenabschnitt für das Dreieck BCD ist. Kathetensatz $\overline{BC}^2=\overline{BD}\cdot\overline{MB}$

$$\Leftrightarrow \overline{MB}=\frac{\overline{BC}^2}{\overline{BD}}=\frac{(9\,cm)^2}{15\,cm}=\frac{81\,cm^2}{15\,cm}=5{,}4\,cm$$ Jetzt $\overline{DM}=\overline{BD}-\overline{MB}=15\,cm-5{,}4\,cm=9{,}6\,cm$

$\overline{CM}$ ist die Höhe des Dreiecks BCD. Also Höhensatz $\overline{CM}^2=\overline{MB}\cdot\overline{DM}$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\overline{CM}}=\sqrt{\overline{BM}\cdot\overline{DM}}=\sqrt{5{,}4\,cm\cdot 9{,}6\,cm}=\sqrt{\frac{1296}{25}\,cm^2}=\frac{36}{5}\,cm=\mathbf{7{,}2\,cm}$$

c) die Strecke $\overline{GM}$

Zunächst Berechnung der Strecke $\overline{BG}$, welche ein Hypotenusenabschnitt für das Dreieck BCM ist. Kathetensatz $\overline{MB}^2=\overline{BC}\cdot\overline{BG}$

$$\Leftrightarrow \overline{BG}=\frac{\overline{MB}^2}{\overline{BC}}=\frac{(5{,}4\,cm)^2}{9\,cm}=\frac{29{,}16\,cm^2}{9\,cm}=3{,}24\,cm$$

Jetzt $\overline{GC}=\overline{BC}-\overline{BG}=9\,cm-3{,}24\,cm=5{,}76\,cm$

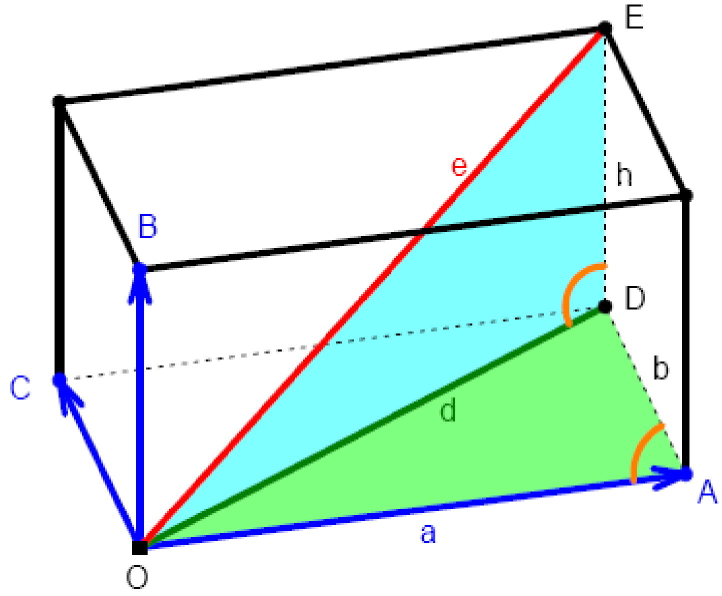
$\overline{GM}$ ist die Höhe des Dreiecks ABM. Also Höhensatz $\overline{GM}^2=\overline{BG}\cdot\overline{GC}$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\overline{GM}}=\sqrt{\overline{BG}\cdot\overline{GC}}=\sqrt{3{,}24\,cm\cdot 5{,}76\,cm}=\sqrt{18{,}6624\,cm^2}=\mathbf{4{,}32\,cm}$$

<u>**Aufgabe 4:**</u> *4 Punkte*

Berechne die Raumdiagonale eines Quaders mit der Länge a = 10 m, der Breite b = 6 m und der Höhe h = 2 m.

Betrachte folgende Skizze (die blauen Pfeile können ignoriert werden):



Die Raumdiagonale e ist die Hypotenuse des blauen Dreiecks ODE. Pythagoras: $e^2 = d^2 + h^2$ (1)

d ist noch unbekannt. Für die Berechnung von *d* betrachte das grüne Dreieck OAD.
Pythagoras: $d^2 = a^2 + b^2$ (2)

Setze Gleichung (2) in Gleichung (1) ein:

$$e^2 = d^2 + h^2 = (a^2 + b^2) + h^2 = a^2 + b^2 + h^2$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{e} = \sqrt{(a^2 + b^2 + h^2)} = \sqrt{(10\,m)^2 + (6\,m)^2 + (2\,m)^2} = \sqrt{100\,m^2 + 36\,m^2 + 4\mathrm{m}^2} = \sqrt{140\,m^2} \approx \mathbf{11{,}83}\,\boldsymbol{m}$$

Bemerkung: Die Gleichung $e^2 = a^2 + b^2 + c^2$ *nennt man auch Satz des Pythagoras im Dreidimensionalen.*