

Aufgabe 1: 7 Punkte (3 + 4)

Die Kepler'schen Gesetze beschreiben die fundamentalen Gesetzmäßigkeiten für die Umlaufbahnen der Planeten um die Sonne. Das 3. Kepler'sche Gesetz besagt, dass sich die Quadrate der Umlaufzeiten bei allen Planeten wie die dritten Potenzen der großen Halbachsen

ihrer Bahnellipsen verhalten. Als Gleichung geschrieben lautet das Gesetz demnach $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$

wobei T_1 und T_2 die Umlaufzeiten der Planeten 1 bzw. 2 sind und a_1 bzw. die a_2 dazugehörigen großen Halbachsen (entspricht der mittleren Entfernung zur Sonne).

a) Berechne die Länge der Umlaufzeit des Mars um die Sonne (gerechnet in Erdentagen).

Planet 1: Erde, Planet 2: Mars

Damit

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \Rightarrow \frac{(365,25 d)^2}{T_2^2} = \frac{(149,6 \cdot 10^9 m)^3}{(227,9 \cdot 10^9 m)^3} \Rightarrow T_2^2 = \frac{222,9^3}{149,6^3} \cdot (365,25 d)^2 \Leftrightarrow T_2^2 = 471648 d^2$$

$$\Rightarrow T_2 = 686,77 d, \text{ da die zweite Lösung (T negativ) unphysikalisch ist.}$$

A: Die Umlaufzeit des Mars um die Sonne dauert 686 Tage.

b) Berechne die mittlere Entfernung des Uranus zur Sonne (also die große Halbachse).

Planet 1: Erde, Planet 2: Uranus

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \Rightarrow \frac{(365,25 d)^2}{(30681,4 d)^2} = \frac{(149,6 \cdot 10^9 m)^3}{(a_2)^3} \Rightarrow a_2^3 = \frac{30681^2}{325,25^2} \cdot (149,6 \cdot 10^9)^3 \Leftrightarrow a_2^3 = 2,362 \cdot 10^{37} m^3$$

$$\Rightarrow a_2 = \sqrt[3]{2,362 \cdot 10^{37} m^3} = 2,869 \cdot 10^{12} m$$

A: Der Uranus ist 2869 Millionen Kilometer von der Sonne entfernt. (Das ist etwas mehr als der 19fache Erdbabstand).

Astronomische Daten:

Planet	große Halbachse	Umlaufzeit
Erde	$149,6 \cdot 10^9 m$	365,256 d
Mars	$227,9 \cdot 10^9 m$	686,8 d
Uranus	$2869 \cdot 10^9 m$	84,001 a

Aufgabe 2: 5 Punkte (2 + 3)

Berechne die Lösungsmenge der folgenden Potenzgleichungen.

a) $\frac{x^4}{4} = 324 \quad \cdot 4$ $\Leftrightarrow x^4 = 1296 \quad \sqrt[4]{\quad}$ $\Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 6 \quad \mathbf{L = \{-6; +6\}}$	b) $(x^2 + x)^5 = 7776 \quad \sqrt[5]{\quad}$ $\Leftrightarrow x^2 + x = 6 \quad -6$ $\Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \quad \text{p-q-Formel:}$ $\Rightarrow x_{1/2} = -0,5 \pm \sqrt{0,5^2 + 6} = -0,5 \pm \sqrt{6,25} = -0,5 \pm 2,5 \quad \mathbf{L = \{-3; +2\}}$
--	--

Aufgabe 3: 9 Punkte (1 + 3 + 5)

Berechne die folgenden Logarithmen.

a) $\log_3(6) = \frac{\lg(6)}{\lg(3)} \approx 1,63$

b) $2 \log_3(6a) + \log_3(4^{-1} a^{-2}) = \log_3(6^2 a^2) + \log_3(4^{-1} a^{-2}) = \log_3\left(\frac{36 a^2}{4 a^2}\right) = \log_3\left(\frac{36}{4}\right) = \log_3(9) = 2$

c)
$$\frac{\log_b\left(\frac{x^3\left(\frac{y^3}{x^3}-1\right)}{\sqrt{y^3}-\sqrt{x^3}}\right)}{\log_b(a)} - \log_a(a^8(x^{1,5}+y^{1,5})) = \log_a\left(\frac{y^3-x^3}{\sqrt{y^3}-\sqrt{x^3}}\right) - \log_a(a^8) - \log_a(x^{1,5}+y^{1,5})$$

$$= \log_a\left(\frac{y^3-x^3}{(\sqrt{y^3}-\sqrt{x^3})(\sqrt{y^3}+\sqrt{x^3})}\right) - 8 = \log_a(1) - 8 = -8$$

Aufgabe 4: 7 Punkte (3 + 4)

Löse die folgenden Exponentialgleichungen. (Runde zwei Stellen nach dem Komma genau).

a) $2^x = 3^{x^2} \quad | \lg$

$$\Leftrightarrow \lg(2^x) = \lg(3^{x^2})$$

$$\Leftrightarrow x \lg(2) = x^2 \lg(3) \quad | : \lg(3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\lg(2)}{\lg(3)} x = x^2 \quad | - \frac{\lg(2)}{\lg(3)} x$$

$$\Leftrightarrow 0 = x^2 - \frac{\lg(2)}{\lg(3)} x$$

$$\Leftrightarrow 0 = x \left(x - \frac{\lg(2)}{\lg(3)} \right)$$

$$\Rightarrow x_1 = 0; x_2 = \frac{\lg(2)}{\lg(3)} \approx 0,63$$

b) $5^{x^3-3x} = 625 \quad | \log_5$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x = 4 \quad | -4$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = 1,5 \pm \sqrt{1,5^2 + 4}$$

$$\Leftrightarrow x_{1/2} = 1,5 \pm \sqrt{6,25}$$

$$\Leftrightarrow x_{1/2} = 1,5 \pm 2,5$$

$$\Rightarrow x_1 = -1; x_2 = 4$$