

Aufgabe 1: 4 Punkte

Sei f eine Potenzfunktion mit der Funktionsgleichung $f(x) = 5x^4$. Weiterhin seien $P(5|y_1)$ und

$Q\left(x_2 \middle| \frac{1}{27}\right)$ Punkte auf dem Graphen von f .

Berechne die fehlenden Koordinaten y_1 von P_1 und x_2 von P_2 .

$$f(4) = 3 \cdot 5^4 = 3 \cdot 625 = 1875 \quad P(5|1875)$$

$$\frac{1}{27} = 3x_2^4 \Leftrightarrow \frac{1}{81} = x_2^4 \Leftrightarrow \sqrt[4]{\frac{1}{81}} \Leftrightarrow \pm \frac{1}{3} = x_2 \quad Q\left(\frac{1}{3} \middle| \frac{1}{27}\right) \text{ oder } Q\left(-\frac{1}{3} \middle| \frac{1}{27}\right)$$

Aufgabe 2: 8 Punkte (1 + 2 + 3 + 2)

Berechne die Lösungsmenge der folgenden Potenzgleichungen.

a) $x^{12} = -531441 \quad | \quad \sqrt[12]{}$ $\Leftrightarrow x = \sqrt[12]{-531441}$ **Radikant negativ! $L = \{\}$**

b) $\frac{x^{11}}{9} = -19683 \Leftrightarrow x^{11} = -177147 \Leftrightarrow x = \sqrt[11]{-177147} \Leftrightarrow x = -3 \quad L = \{-3\}$

c) $(x^3 + 10)^3 = 5832 \Leftrightarrow x^3 + 10 = \sqrt[3]{5832} \Leftrightarrow x^3 + 10 = 18 \Leftrightarrow x^3 = 8 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2 \quad L = \{2\}$

d) $(2,71x^{11})^{66} + 55 = 55 \Leftrightarrow (2,71x^{11})^{66} = 0 \Rightarrow x = 0 \quad L = \{0\}$

Aufgabe 3: 12 Punkte (1 + 2 + 3 + 6)

Berechne die folgenden Terme oder vereinfache sie so weit wie möglich. Näherungswerte von Ergebnissen auf zwei Stellen nach dem Komma genau runden!

a) $\log_6(12) = \frac{\lg 12}{\lg 6} \approx 1,39$

b) $\log_5(75) - \log_5(3) = \log_5 \frac{75}{3} = \log_5(25) = 2$

c)
$$\lg\left(\frac{a^2 + b^2}{(a+b)^2 - c(abc^{-1} - 1) - c(abc^{-1} + 1)}\right) = \lg\left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 + 2ab + b^2 - ab + c - ab - c}\right)$$

$$= \lg\left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 + 2ab + b^2 - 2ab}\right) = \lg\left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2}\right) = \lg(1) = 0$$

d)
$$\log_z\left(\frac{z^9}{w^{-4}}\right) + \frac{\lg\left(\frac{x^4 - y^4}{(z^2x^2 - z^2y^2)(w^2x^2 + w^2y^2)}\right)}{\lg(z)} + \log_z\left(\frac{w^{-2}}{z^2}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \log_z(w^4 z^9) + \log_z\left(\frac{x^4 - y^4}{z^2(x^2 - y^2)w^2(x^2 + y^2)}\right) + \log_z(w^{-2} z^{-2}) \\
&= \log_z(w^4 z^9) + \log_z\left(\frac{x^4 - y^4}{z^2 w^2 (x^4 - y^4)}\right) + \log_z(w^{-2} z^{-2}) \\
&= \log_z(w^4 z^9) + \log_z(z^{-2} w^{-2}) + \log_z(w^{-2} z^{-2}) \\
&= \log_d(w^4 z^9 z^{-2} w^{-2} z^{-2}) \\
&= \log_z(z^5) = 5
\end{aligned}$$

Aufgabe 4: 6 Punkte (2 + 4)

Löse die folgenden Exponentialgleichungen.

a) $6^x = 18 \Leftrightarrow x = \log_6(18) = \frac{\lg 18}{\lg 6} \approx 1,61$

b) $5^{x^2-8x+20} = 625 \Leftrightarrow x^2 + 8x + 20 = 4 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 4$

Aufgabe 5: 7 Punkte (3 + 4)

Bestimmte Formen der Grippe können zu einer regelrechten Epidemie werden, die sich dann sehr schnell ausbreitet. Nehmen wir an, nach der ersten Woche haben wir 100 Grippekranke. Ab dann steckt jeder Kranke pro Woche weitere 8 Personen an (egal, wie viele Menschen bereits krank sind).

a) Berechne, wie viele Menschen nach 4 Wochen erkrankt sind.

$$f(t) = 100 \cdot 8^{t-1} \quad t = \text{Anzahl der Wochen} \quad f(4) = 100 \cdot 8^3 = 51200$$

A: Nach 4 Wochen sind 51.200 Menschen angesteckt.

b) Berechne, wann jeder Mensch in Deutschland (82 Millionen Einwohner) theoretisch an der Grippe erkrankt ist.

$$82000000 = 100 \cdot 8^{t_1-1} \Leftrightarrow 820000 = 8^{t_1-1} \Leftrightarrow \log_8 820000 = t_1 - 1 \Leftrightarrow 7,55 \approx t_1$$

A: Nach etwa siebeneinhalb Wochen ist jeder Einwohner Deutschlands an der Grippe erkrankt.