Mathematik Klasse 10a, 2. KA – Kugel und Potenzen – Lösung N **11.11.2010**

<u>Aufgabe 1:</u> *9 Punkte (2 + 2 + 2 + 3)*

Berechne durch Anwenden der Rechengesetze für Potenzen und gib das Ergebnis als Bruch an. Schreibe alle Umformungsschritte auf.

a) $\mathbf{3^4 \cdot 3^{-5}} = 3^{4-5} = 3^{-1} = \mathbf{\frac{1}{3}}$

b) $\mathbf{\frac{4^{-2000}}{4^{-1997}}} = 4^{-2000-(-1997)} = 4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \mathbf{\frac{1}{64}}$

c) $\mathbf{(-11)^{-2}} = \frac{1}{(-11)^2} = \mathbf{\frac{1}{121}}$

d $\mathbf{\frac{\sqrt[9]{2^9}}{\sqrt[1000]{36^{500}}}} = \frac{2^{\frac{9}{9}}}{36^{\frac{500}{100}}} = \frac{2^1}{36^{0,5}} = \frac{1}{\sqrt{36}} = \mathbf{\frac{1}{6}}$

<u>Aufgabe 2:</u> *11 Punkte (1 + 3 + 3 + 4)*

Vereinfache die folgenden Terme so weit wie möglich. Wende die Rechengesetze für Potenzen an. Schreibe alle Umformungsschritte auf. Wende ggf.eine binomische Formel an.

a) $\mathbf{\left[\frac{5c}{a^{-1}} \cdot \left(\frac{2}{3}ac\right)^{-2}\right]^0 = 1}$

Ab hier sind verschiedene Lösungswege möglich

b) $\mathbf{\left(\frac{3x}{4y^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{2y^3}{9x^5}\right)^2} = \frac{3x}{4y^2}\left(\frac{3x}{4y^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{2y^3}{9x^5}\right)^2 = \frac{3x}{4y^2}\left(\frac{3x\,2y^3}{4y^2 \cdot 9x^5}\right)^2 = \frac{3x}{4y^2}\left(\frac{y}{2 \cdot 3x^4}\right)^2 = \frac{3xy^2}{4 \cdot y^2 \cdot 4 \cdot 9x^8} = \mathbf{\frac{1}{48x^7}}$

c) $\mathbf{\frac{\sqrt[10]{a^{12}} \cdot y^{1,2}}{\sqrt[15]{a^{18}}}} = \frac{a^{\frac{12}{10}} y^{12}}{a^{\frac{18}{15}}} = \frac{a^{1,2} y^{1,2}}{a^{1,2}} = y^{1,2} = \mathbf{\sqrt[5]{y^6}}$

d) $\mathbf{\frac{a^{k-1}b^{l-2}c^{m-3} - a^{k+5}b^{l+4}c^{m+3}}{a^{k+2}b^{l+1}c^m(1-a^3b^3c^3)}} = \frac{a^{k-1}b^{l-2}c^{m-3}(1-a^6b^6c^6)}{a^{k+2}b^{l+1}c^m(1-a^3b^3c^3)}$

$= \frac{(1-a^3b^3c^3)(1+a^3b^3c^3)}{a^3b^3c^3(1-a^3b^3c^3)} = \frac{1}{a^3b^3c^3}(1+a^3b^3c^3) = \mathbf{\frac{1}{a^3b^3c^3} + 1}$

<u>Aufgabe 3:</u> 12 *Punkte (4 + 4 + 4)*

Ein Wassertropfen im Flug hat in etwa die Form einer Halbkugel mit einem aufgesetzem Kegel. Es sei die Höhe des Kegels dreimal so groß wie der Radius der Halbkugel. Der Radius für diese Aufgabe beträgt 1 mm.

a) Zeige mit einer Rechnung, dass das Volumen des Regentropfens etwa $5{,}24\cdot 10^{-6}\,l$ beträgt.

$$V_{Regentropfen}=V_{Halbkugel}+V_{Kegel}$$

$$\begin{aligned}V_R&=\frac{2}{3}\pi r^3+\frac{1}{3}\pi r^2\cdot h \qquad h=3r\\ &=\frac{2}{3}\pi r^3+\frac{1}{3}\pi r^2\cdot 3r\\ &=\frac{2}{3}\pi r^3+\pi r^3=\frac{5}{3}\pi r^3=\frac{5}{3}\pi(1\,mm)^3=\frac{5}{3}\pi\,mm^3=\frac{5}{3}\pi\cdot 10^{-6}\,dm^3\approx\mathbf{5{,}24\cdot 10^{-6}}\,\boldsymbol{l}\end{aligned}$$

b) Der Regentropfen fällt in eine leere Regentonne. Er verteilt sich kreisförmig, bis das Wasser noch 0,1 mm hoch steht. Berechne den Radius des Kreises der Wasserlache.

Die Wasserlache hat die Form eines Zylinders mit dem unbekannten Radius r_Z und der Höhe $h_Z=0{,}1\,mm.$

$$V_Z=\pi r_Z^2\cdot h_Z$$

$$\Leftrightarrow r_Z^2=\frac{V_Z}{\pi h_Z}\Rightarrow r_Z=\sqrt{\frac{V_Z}{\pi h_Z}}=\sqrt{\frac{5}{3}\frac{\pi\cdot mm^3}{\pi\cdot 0{,}1\,mm}}=\sqrt{\frac{50}{3}mm^2}=\sqrt{\frac{2\cdot 25}{3}}\,mm=5\sqrt{\frac{2}{3}}\,mm\approx\mathbf{4{,}08}\,\boldsymbol{mm}$$

A: Die Wasserlache hat einen Radius von ca. 2,36 mm.

c) Bei einem starken Gewitter können schon mal 50 Liter Wasser pro Quadratmeter fallen. Berechne die Anzahl der Regentropfen, die bei einem solchen Gewitter in eine Regentonne mit dem Radius $r=\frac{1}{\sqrt{\pi}}m$ fallen.

Grundfläche der Regentonne: $A_{Rt}=\pi r^2=\pi\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}m\right)^2=\pi\cdot\frac{1}{\pi}m^2=1\,m^2$

Also fallen 50 l Wasser in die Regentonne.

Anzahl der Tropfen $n=\frac{50\,l}{5{,}24\cdot 10^{-6}\,l}=\mathbf{9{,}54\cdot 10^6}$

A: Es fallen ca. 9,5 Millionen Regentropfen in die Tonne.