

Aufgabe 1: 6 Punkte

Aus einer Halbkugel wird ein Kegel geschnitten. Der Radius r der Grundfläche des Kegels und seine Höhe h sind genauso groß wie der Radius der Halbkugel. Die Grundfläche des Kegels liegt genau auf der Kreisfläche der Halbkugel.

a) Berechne die Oberfläche O des Restkörpers, wenn der Radius $r = 6 \text{ dm}$ beträgt.

O = Oberfläche Halbkugel ohne Kreisfläche (= halbe Kugeloberfläche) + Mantelfläche Kegel.

$$O = 2\pi r^2 + \pi r s = \pi r(2r + s) \quad (1)$$

Berechnung von s :

Radius und Höhe und Seitenkante bilden ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse s .

$$s^2 = r^2 + h^2. \quad \text{Weil } h = r \text{ gilt: } s^2 = 2r^2 \quad (\text{Das Dreieck ist die Hälfte eines Quadrats})$$

$$\text{Also } s = \sqrt{2}r$$

Setze $s = \sqrt{2}r$ in (1) ein:

$$O = \pi r(2r + \sqrt{2}r) = \sqrt{2}\pi r^2(\sqrt{2} + 1) = \sqrt{2}\pi(6 \text{ dm})^2(\sqrt{2} + 1) \approx 386,14 \text{ dm}^2$$

Aufgabe 2: 5 Punkte (1 + 2 + 2)

Berechne durch Anwenden der Rechengesetze für Potenzen. Schreibe alle Umformungsschritte auf.

$$\text{a) } 3^{200} \cdot 3^{-197} = 2^{200+(-197)} = 3^3 = 27$$

$$\text{b) } (-4)^{-3} = \frac{1}{(-4)^3} = \frac{1}{-64} = -\frac{1}{64}$$

$$\text{c) } \sqrt[300]{8^{100}} = 8^{\frac{100}{300}} = 8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

Aufgabe 3: 4 Punkte (1 + 2 + 1)

Berechne, falls möglich, mit Hilfe der Rechengesetze für Potenzen die folgenden Wurzeln. Andernfalls zeige mit Hilfe der Rechengesetze für Potenzen, dass es nicht möglich ist, die Wurzel zu berechnen.

$$\text{a) } \sqrt[1]{81} = 81^{\frac{1}{1}} = 81^1 = 81 \quad \text{b) } \sqrt[2]{81} = 81^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{81^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{81}} = \frac{1}{9}$$

$$\text{c) } \sqrt[0]{81} = 81^{\frac{1}{0}} = \text{nicht definiert!}$$

Aufgabe 4: 6 Punkte (1 + 2 + 3)

Vereinfache die folgenden Terme so weit wie möglich. Wende die Rechengesetze für Potenzen an. Schreibe alle Umformungsschritte auf.

$$\text{a) } (x^2)^{-4} = x^{2 \cdot (-4)} = x^{-8} = \frac{1}{x^8} \quad \text{b) } x^{(2^{-4})} = x^{\frac{1}{16}} = \sqrt[16]{x}$$

$$\text{c) } \frac{\sqrt[10]{a^{12}} \cdot y^{1,2}}{\sqrt[15]{a^{18}}} = \frac{a^{\frac{12}{10}} y^{1,2}}{a^{\frac{18}{15}}} = \frac{a^{1,2} y^{1,2}}{a^{1,2}} = y^{1,2} = \sqrt[5]{y^6}$$

Aufgabe 5: 6 Punkte (2 + 4)

Vereinfache die folgenden Terme. Wende ggf. eine binomische Formel an.

$$\text{a) } \frac{x^{10} - x^5}{x^4} = \frac{x^4(x^6 - x)}{x^4} = x^6 - x$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{x^{a+2} y^{b+3} - x^{a-2} y^{b-3}}{x^a y^b (x^2 y^3 - 1)} &= \frac{x^{a-2} y^{b-3} (x^4 y^6 - 1)}{x^a y^b (x^2 y^3 - 1)} = \frac{x^{-2} y^{-3} (x^2 y^3 + 1)(x^2 y^3 - 1)}{(x^2 y^3 - 1)} \\ &= x^{-2} y^{-3} (x^2 y^3 + 1) = 1 + x^{-2} y^{-3} = 1 + \frac{1}{x^2 y^3} \end{aligned}$$