

Aufgabe 1: 6 Punkte

Aus einer Halbkugel wird ein Kegel geschnitten. Der Radius r der Grundfläche des Kegels und seine Höhe h sind genauso groß wie der Radius der Halbkugel. Die Grundfläche des Kegels liegt genau auf der Kreisfläche der Halbkugel.

a) Berechne die Oberfläche O des Restkörpers, wenn der Radius $r = 5 \text{ mm}$ beträgt.

O = Oberfläche Halbkugel ohne Kreisfläche (= halbe Kugeloberfläche) + Mantelfläche Kegel.

$$O = 2\pi r^2 + \pi r s = \pi r(2r + s) \quad (1)$$

Berechnung von s :

Radius und Höhe und Seitenkante bilden ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse s .

$$s^2 = r^2 + h^2. \quad \text{Weil } h = r \text{ gilt: } s^2 = 2r^2 \quad (\text{Das Dreieck ist die Hälfte eines Quadrats})$$

$$\text{Also } s = \sqrt{2}r$$

Setze $s = \sqrt{2}r$ in (1) ein:

$$O = \pi r(2r + \sqrt{2}r) = \sqrt{2}\pi r^2(\sqrt{2} + 1) = \sqrt{2}\pi(5 \text{ mm})^2(\sqrt{2} + 1) \approx \mathbf{268,15 \text{ mm}^2}$$

Aufgabe 2: 5 Punkte (1 + 2 + 2)

Berechne durch Anwenden der Rechengesetze für Potenzen. Schreibe alle Umformungsschritte auf.

$$\text{a) } 2^{1000} \cdot 2^{-995} = 2^{1000 + (-995)} = 2^5 = \mathbf{32}$$

$$\text{b) } (-12)^{-2} = \frac{1}{(-12)^2} = \frac{1}{\mathbf{144}}$$

$$\text{c) } \sqrt[1000]{36^{500}} = 36^{\frac{500}{1000}} = 36^{\frac{1}{2}} = \sqrt{36} = \mathbf{6}$$

Aufgabe 3: 4 Punkte (1 + 2 + 1)

Berechne, falls möglich, mit Hilfe der Rechengesetze für Potenzen die folgenden Wurzeln. Andernfalls zeige mit Hilfe der Rechengesetze für Potenzen, dass es nicht möglich ist, die Wurzel zu berechnen.

$$\text{a) } \sqrt[1]{64} = 64^{\frac{1}{1}} = 64^1 = \mathbf{64} \quad \text{b) } \sqrt[2]{64} = 64^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{64^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{64}} = \frac{1}{\mathbf{8}}$$

$$\text{c) } \sqrt[0]{64} = 64^{\frac{1}{0}} = \mathbf{\text{nicht definiert!}}$$

Aufgabe 4: 6 Punkte (1 + 2 + 3)

Vereinfache die folgenden Terme so weit wie möglich. Wende die Rechengesetze für Potenzen an. Schreibe alle Umformungsschritte auf.

$$\text{a) } (a^3)^{-4} = a^{3 \cdot (-4)} = a^{-12} = \frac{1}{a^{12}} \quad \text{b) } a^{(3^{-4})} = a^{\frac{1}{81}} = \sqrt[81]{a}$$

$$\text{c) } \frac{\sqrt[10]{z^{14}} \cdot b^{1,4}}{\sqrt[15]{z^{21}}} = \frac{z^{\frac{14}{10}} b^{1,4}}{z^{\frac{21}{15}}} = \frac{z^{1,4} b^{1,4}}{z^{1,4}} = b^{1,4} = \sqrt[5]{b^7}$$

Aufgabe 5: 6 Punkte (2 + 4)

Vereinfache die folgenden Terme. Wende ggf. eine binomische Formel an.

$$\text{a) } \frac{a^{12} + a^{10}}{a^6} = \frac{a^6(a^6 + a^4)}{a^6} = a^6 + a^4$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{a^{x+2} b^{y+3} - a^{x-2} b^{y-3}}{a^x b^y (a^2 b^3 + 1)} &= \frac{a^{x-2} b^{y-3} (a^4 b^6 - 1)}{a^x b^y (a^2 b^3 + 1)} = \frac{a^{-2} b^{-3} (a^2 b^3 + 1)(a^2 b^3 - 1)}{(a^2 b^3 + 1)} \\ &= a^{-2} b^{-3} (a^2 b^3 - 1) = 1 - a^{-2} b^{-3} = 1 - \frac{1}{a^2 b^3} \end{aligned}$$