

Aufgabe 1: Schreibe den folgenden Term als Ausdruck einer einzelnen Logarithmusfunktion und vereinfache ihn so weit wie möglich.

$$\text{a) } \log_2(72) - \log_2(9) = \log_2\left(\frac{72}{9}\right) = \log_2(8) = 3$$

$$\text{b) } \log_3\left(\frac{\log_b(a^9)}{\log_b(a)}\right) = \log_3(\log_a(a^9)) = \log_3(9) = 2$$

$$\begin{aligned} \text{c) } & \log_a\left(\frac{4x^2 - 4y^2}{(2x - 2y)^2}\right) + \log_a(x - y) = \log_a\left(\frac{(2x - 2y)(2x + 2y)}{(2x - 2y)^2}\right) + \log_a(x - y) \\ & = \log_a\left(\frac{(x + y)}{(x - y)}\right) + \log_a(x - y) = \log_a\left(\frac{(x + y)(x - y)}{(x - y)}\right) = \log_a(x + y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } & \log_a(a^2 b^3 c^4) + \log_a\left(\frac{(a + b)}{(a^2 - b^2)}\right) - \frac{\ln(b^3 c^4)}{\ln(a)} \\ & = \log_a(a^2) + \log_a(b^3 c^4) + \log_a\left(\frac{(a + b)}{(a + b)(a - b)}\right) - \log_a(b^3 c^4) \\ & = 2 + \log_a\left(\frac{b^3 c^4}{b^3 c^4}\right) + \log_a\left(\frac{1}{a - b}\right) = 2 + \log_a(1) + \log_a\left(\frac{1}{a - b}\right) = 2 + \log_a\left(\frac{1}{a - b}\right) = 2 - \log_a(a - b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } & 4 \cdot \log_a(b^2 - c^2) - \frac{\lg(b + c) + \lg(b - c)}{\lg(a)} = 4 \cdot \log_a(b^2 - c^2) - \frac{\lg((b + c) \cdot (b - c))}{\lg(a)} \\ & = 4 \cdot \log_a(b^2 - c^2) - \frac{\lg(b^2 - c^2)}{\lg(a)} = 4 \cdot \log_a(b^2 - c^2) - \log_a(b^2 - c^2) = 3 \cdot \log_a(b^2 - c^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } & \log_a(a^2 b^3 c^4) - \log_a\left(\frac{(3a + 3b) \cdot b^5}{(3a^2 + 6ab + 3b^2) \cdot c^2}\right) + \frac{\lg(b^2 c^{-6})}{\lg(a)} \\ & = 2 \cdot \log_a(a) + 3 \cdot \log_a(b) + 4 \cdot \log_a(c) - \log_a\left(\frac{3(a + b)b^5}{3(a + b)^2 c^2}\right) + \log_a(b^2 c^{-6}) \\ & = 2 + 3 \cdot \log_a(b) + 4 \cdot \log_a(c) - 5 \cdot \log_a(b) + \log_a(a + b) + 2 \cdot \log_a(c) + 2 \cdot \log_a(b) - 6 \cdot \log_a(c) \\ & = 2 + \log_a(a + b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g) } & \log_a\left(\frac{\frac{\log_b(x^2 y^2)}{\log_b(a)} + \frac{\lg(x^3)}{\lg(a)} + \frac{\frac{\ln(y^4)}{\ln(b)}}{\log_b(a)}}{\log_a(x^5 y^6)}\right) = \log_a\left(\frac{\log_a(x^2 y^2) + \log_a(x^3) + \frac{\log_b(y^4)}{\log_b(a)}}{\log_a(x^5 y^6)}\right) \\ & = \log_a\left(\frac{\log_a(x^2 y^2) + \log_a(x^3) + \log_a(y^4)}{\log_a(x^5 y^6)}\right) = \log_a\left(\frac{\log_a(x^5 y^6)}{\log_a(x^5 y^6)}\right) = \log_a(1) = 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Bestimme x mit Hilfe von Äquivalenzumformungen so, dass es eine Lösung der folgenden Gleichung ist.

$$\text{a) } -\log_a(x) = \log_a(8b^3c^4) - 3 \cdot \log_a(b) + 2 \cdot \log_a(cde) + \log_a\left(\frac{1}{c^6}\right) - \log_a(d^2e^2)$$

$$\Leftrightarrow -\log_a(x) = \log_a(8) + \log_a\left(\frac{b^3c^4c^2d^2e^2}{b^3c^6d^2e^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow -\log_a(x) = \log_a(8) + \log_a(1)$$

$$\Leftrightarrow \log_a\left(\frac{1}{x}\right) = \log_a(8)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} = 8$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{8}$$

$$\text{b) } -\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = \log_a(5b^4c^4) + 2 \cdot \log_a(b) + 2 \cdot \log_a\left(\frac{(de)}{(b^3c^2)}\right) - \log_a(d^2e^2)$$

$$\Leftrightarrow -\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = \log_a(5) + 4 \cdot \log_a(b) + 4 \cdot \log_a(c) + 2 \cdot \log_a(b) + \log_a\left(\frac{(de)^2}{(b^3c^2)^2}\right) - 2 \cdot \log_a(d) - 2 \cdot \log_a(e)$$

$$\Leftrightarrow -\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = \log_a(5) + 6 \cdot \log_a(b) + 4 \cdot \log_a(c) + 2 \cdot \log_a(d) + 2 \cdot \log_a(e) - 6 \cdot \log_a(b) - 4 \cdot \log_a(c) - 2 \cdot \log_a(d) - 2 \cdot \log_a(e)$$

$$\Leftrightarrow -\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = \log_a(5)$$

$$\Leftrightarrow \log_a(x) = \log_a(5)$$

$$\Leftrightarrow x = 5$$

$$\text{c) } \log_b(x^2) \cdot \log_a(b) = \log_a\left[\left((a^2 - b^2) + \lg(10^{b^2})\right)^{\frac{\ln(a^2)}{\ln(a)}}\right]$$

$$\Leftrightarrow \log_b(x^2) \cdot \log_a(b) = \log_a\left[\left((a^2 - b^2) + b^2\right)^{\log_a(a^2)}\right]$$

$$\Leftrightarrow \log_b(x^2) \cdot \log_a(b) = \log_a\left[(a^2)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow \log_b(x^2) = \frac{\log_a(a^4)}{\log_a(b)}$$

$$\Leftrightarrow \log_b(x^2) = \log_b(a^4)$$

$$\Leftrightarrow x^2 = a^4$$

$$\Leftrightarrow x_{1/2} = \pm a^2$$

Aufgabe 3: Bestimme x mit Hilfe von Äquivalenzumformungen so, dass es eine Lösung der folgenden Gleichung ist.

$$\log_k(x) = 2 \cdot \log_k(4) + 3 \cdot \log_k(3)$$

a) $\Leftrightarrow \log_k(x) = \log_k(4^2) + \log_k(3^3)$

$$\Leftrightarrow \log_k(x) = \log_k(16 \cdot 27)$$

$$\Leftrightarrow x = 432$$

$$-\log_a(x) = 2 \cdot \log_a\left(\frac{a^2 b^4}{c^3}\right) - \log_a(a^4) + \log_a(b^{-4}) + 3 \cdot \log_a(c^2) + 2 \cdot \log_a\left(\frac{a^2}{b^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow -\log_a(x) = \log_a\left(\frac{a^4 \cancel{b^8} \cancel{c^6} \cancel{a^4}}{\cancel{c^6} \cancel{a^4} \cancel{b^4} \cancel{b^4}}\right)$$

b) $\Leftrightarrow \log_a(x^{-1}) = \log_a(a^4)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} = a^4$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{a^4}$$

Aufgabe 4: Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Exponentialgleichungen. Gib das Ergebnis mit zwei Stellen Genauigkeit hinter dem Komma an.

a)

$$\begin{aligned} 3^{4x-6} &= 81 \\ \Leftrightarrow 3^{4x-6} &= 3^4 \\ \Leftrightarrow 4x-6 &= 4 \\ \Leftrightarrow 4x &= 10 \\ \Leftrightarrow x &= 2,5 \end{aligned}$$

$$L = \{2,5\}$$

b)

$$\begin{aligned} 2^x &= 3 \cdot 5^{x-1} \\ \Leftrightarrow 2^x &= \frac{3}{5} \cdot 5^x \\ \Leftrightarrow \lg(2^x) &= \lg\left(\frac{3}{5} \cdot 5^x\right) \\ \Leftrightarrow \lg(2^x) &= \lg\left(\frac{3}{5}\right) + \lg(5^x) \\ \Leftrightarrow x \cdot \lg(2) &= \lg\left(\frac{3}{5}\right) + x \cdot \lg(5) \\ \Leftrightarrow x \cdot (\lg(2) - \lg(5)) &= \lg(3) - \lg(5) \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\lg(3) - \lg(5)}{\lg(2) - \lg(5)} \\ \Leftrightarrow x &\approx 0,5575 \end{aligned}$$

$$L = \{0,5575\}$$

c)

$$\begin{aligned} 4^{\left(x^2 - \frac{3}{16}\right)} &= \left(\frac{1}{2}\right)^x \\ \Leftrightarrow \lg\left(4^{\left(x^2 - \frac{3}{16}\right)}\right) &= \lg\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x\right) \\ \Leftrightarrow \left(x^2 - \frac{3}{16}\right) \cdot \lg(4) &= x \cdot \lg\left(\frac{1}{2}\right) \\ \Leftrightarrow x^2 - \frac{3}{16} &= x \cdot \frac{\lg\left(\frac{1}{2}\right)}{\lg(4)} \\ \Leftrightarrow x^2 - \frac{3}{16} &= -0,5 \cdot x \\ \Leftrightarrow x^2 + 0,5x - \frac{3}{16} &= 0 \\ \Leftrightarrow x_{1/2} &= -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{3}{16}} \\ \Leftrightarrow & \\ \Leftrightarrow x_{1/2} &= -\frac{1}{4} \pm \frac{2}{4} \\ \Rightarrow x_1 &= -\frac{3}{4}; x_2 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$L = \{-3/4; 1/4\}$$