Mathematik Klasse 9a, 4. Klassenarbeit – Parabeln – Lösung B **11.03.2010**

Bei Rechenaufgaben die Aufgaben jeweils ins Heft übertragen. Bei Textaufgaben sind Antwortssätze zu schreiben. Auf den Formalismus bei den LGS achten! Erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner

__Aufgabe 1:__ Beschreibe die folgenden Parabel, in dem du den Scheitelpunkt angibst, ob sie enger oder weiter als die Normalparabel ist, und ob sie nach oben oder unten geöffnet ist.
(*2 + 3 + 4 Punkte*)

a) $f(x)=\frac{1}{3}x^2$

S(0|0). Die Parabel ist nach oben geöffnet und weiter als die Normalparabel. ***2 Punkte***

b)
$$\begin{aligned} p(x) &= x^2-12x \\ &= x^2-12x+36-36 \\ &= (x-6)^2-36 \end{aligned}$$

3 Punkte

S(6|-36). Die Parabel ist nach oben geöffnet und genauso weit wie die Normalparabel.

c)
$$\begin{aligned} q(x) &= -\frac{1}{4}x^2-2x-6 \\ &= -\frac{1}{4}\left(x^2+8x\right)-6 \\ &= -\frac{1}{4}\left(x^2+8x+16-16\right)-6 \\ &= -\frac{1}{4}\left((x+4)^2-16\right)-6 \\ &= -\frac{1}{4}(x+4)^2+4-6 \\ &= -\frac{1}{4}(x+4)^2-2 \end{aligned}$$

4 Punkte

S(-4|-2). Die Parabel ist nach unten geöffnet und weiter als die Normalparabel.

__Aufgabe 2:__ Eine Parabel p schneidet die x-Achse bei $x_1=-3$ und $x_2=2$ sowie die y-Achse beim Wert $y_1=-12$. (*5 + 4 Punkte*)

a) Zeige mit einer Rechnung, dass die Funktionsgleichung der Parabel $p(x)=2x^2+2x-12$ ist.

Drei Punkte der Parabel sind gegeben: $P_1(-3|0)$, $P_2(2|0)$, $P_3(0|-12)$. Eingesetzt in die Funktionsgleichung $p(x)=ax^2+bx+c$:

I. $0=a\cdot(-3)^2+b\cdot(-3)+c$
II. $0=a\cdot 2^2+b\cdot 2+c$
III. $-12=a\cdot 0^2+b\cdot 0+c$

I. $0=9a-3b+c$ | setze c = -12 ein
II. $0=4a+2b+c$ | setze c = -12 ein
III. $-12=c$

Ia. $0=9a-3b-12$ | ·2
IIa. $0=4a+2b-12$ | ·3

Ib. $0=18a-6b-24$ | ·2
IIb. $0=12a+6b-36$ | Ib. +IIb.

IIc. $0=30a-60$ | +60
$\Leftrightarrow 60=30a$ | : 30
$\Leftrightarrow 2=a$

Setze a = 2 in IIa ein:

IId. $0=8+2b-12$ | +4
$\Leftrightarrow 4=2b$ | : 2
$\Leftrightarrow 2=b$

Also a = 2, b = 2 und c = -12, somit $\boldsymbol{p(x)=2x^2+2x-12}$ ***5 Punkte***

b) Berechne die Schnittpunkte der Geraden m $g(x)=2\cdot(x+138)$ it der Parabel p.

Gleichsetzen der Funktionsgleichungen $p(x_s)=g(x_s)$

$2x^2+2x-12=2\cdot(x+138)$ | T
$\Leftrightarrow 2x^2+2x-12=2x+276$ | - 2x + 12
$\Leftrightarrow 2x^2=288$ | :2
$\Leftrightarrow x^2=144$ | √
$\Rightarrow x_1=-12$
$\Rightarrow x_2=12$

Berechnen der y-Koordinaten:

$g(x_1)=2\cdot(-12+138)=2\cdot(126)=252$
$g(x_2)=2\cdot(12+138)=2\cdot(150)=300$

Die Schnittpunkte haben die Koordinaten (-12|252) und (12|300). 4 Punkte

Mathematik Klasse 9a, 4. Klassenarbeit – Parabeln – Lösung B **11.03.2010**

<u>**Aufgabe 3:**</u>Ein Auto mit der Masse *m = 1750 kg* bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit *v*. Die Bewegungsenergie dieses Autos sich nach der Formel $E=\frac{1}{2}m v^2$ (Einheit der Energie ist 1 kg m²/s²). (*2 + 3 Punkte*)

a) Berechne die Energie E_1, die das Auto hat, wenn es sich mit *v = 20 m/s* bewegt.

$$E_1=\frac{1}{2}\cdot 1750\,kg\cdot\left(20\frac{m}{s}\right)^2=875\,kg\cdot 400\frac{m^2}{s^2}=\mathbf{350000\frac{kg\,m^2}{s^2}}$$

A: Das Auto *hat die Energie von 350.000 kg m²/s².*

b) Berechne die Geschwindigkeit v_2, die das Auto hat, wenn es die Bewegungsenergie $E_2 = 813968{,}75\ kg\ m^2/s^2$ besitzt.

$$E=\frac{1}{2}m v^2 \quad | \quad \cdot\frac{2}{m}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2E}{m}=v^2 \quad | \sqrt{}$$

$$\Leftrightarrow v=\pm\sqrt{\frac{2E}{m}}$$ Nun E = *813968,75* kg m²/s² und m = 1750 kg einsetzen

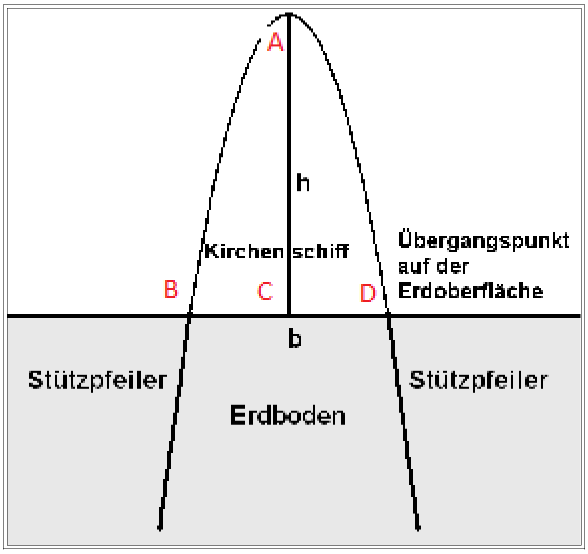
$$v=\pm\sqrt{\frac{2\cdot 813968{,}75\,kg\,m^2}{1750\,kg\,s^2}}$$

$$v=\pm 30{,}5\,s$$

Vorwärts oder rückwärts ist egal, also

A: Das Auto braucht bewegt sich mit 30,5 m/s. ***3 Punkte***

<u>**Aufgabe 4:**</u> Die Parabelkirche in Gelsenkirchen wurde von dem Architekten Josef Franke in den Jahren 1927-1929 erbaut. Das Kirchenmittelschiffe hat die Höhe h = 15 m und die Breite b = 10 m. (*6 + 3 Punkte*)



Skizze des Kirchenschiffes

Die Parabelkirche in Gelsenkirchen

Mathematik Klasse 9a, 4. Klassenarbeit – Parabeln – Lösung B 11.03.2010

a) Stelle eine Funktionsgleichung auf, nach welcher das Kirchenmittelschiff hätte konstruiert werden können.

Um drei Punkte ablesen zu können, muss ein Koordinatensystem bestimmt werden.
Die möglichen Punkte für den Koordinatenursprung sind eingezeichnet.

Punkt A im Scheitelpunkt der Parabel:

Dann sind die drei Punkte $P_1(0|0)$, $P_2(-6|-18)$, $P_3(6|-18)$.

Einsetzen in die Funktionsgleichung $f(x)=a x^2+bx+c$

I. $0=a\cdot 0^2+b\cdot 0+c$
II. $-18=a\cdot(-6)^2+b\cdot(-6)+c$
III. $-18=a\cdot 6^2+b\cdot 6+c$

I. $0=c$
II. $-18=36a-6b+c$
III. $-18=36a+6b+c$ | II + III

IIIa. $-36=72a$ | :50
$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}=a$

Setze $a=-\frac{1}{2}$ in II ein:

II. $-18=36\left(-\frac{1}{2}\right)-6b+0$ | T
$\Leftrightarrow -18=-18-6b$ | +18
$\Leftrightarrow 0=-6b$ | :(-6)
$\Leftrightarrow 0=b$

Also $a=-\frac{1}{2}$, b = 0 und c = 0, somit $f(x)=-\frac{1}{2}x^2$

Punkt B: Dann sind die drei Punkte $P_1(0|0)$, $P_2(6|18)$, $P_3(12|0)$.

Einsetzen in die Funktionsgleichung $f(x)=a x^2+bx+c$

I. $0=a\cdot 0^2+b\cdot 0+c$
II. $18=a\cdot 6^2+b\cdot 6+c$
III. $0=a\cdot 12^2+b\cdot 12+c$

I. $0=c$
II. $18=36a+6b+c$ | setze c = 0 ein
III. $0=144a+12b+c$ | setze c = 0 ein

IIa. $18=36a+6b$
IIIa. $0=144a+12b$ | IIIa. - 2 IIa.

IIIb. $-36=72a$ | :36
$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}=a$

Setze $a=-\frac{1}{2}$ in IIIa. ein:

IIIa. $0=144\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+12b$ | T
$\Leftrightarrow 0=-72+12b$ | + 72
$\Leftrightarrow 72=12b$ | :12
$\Leftrightarrow 6=b$

Also $a=-\frac{1}{2}$, b = 6 und c = 0, somit $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+6x$

Punkt C: $P_1(-6|0)$, $P_2(0|18)$, $P_3(6|0)$. $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+18$

Punkt D: $P_1(-12|0)$, $P_2(-6|18)$, $P_3(0|0)$. $f(x)=-\frac{1}{2}x^2-6x$ ***6 Punkte***

b) Ein 3 Meter hoher Tannenbaum soll 2,5 Meter von der Wand unten entfernt aufgestellt werden. Berechne den Abstand von der Baumspitze bis zur Decke.

Bei allen drei Funktionsgleichungen kommt das gleiche Ergebnis heraus.

Hier: $f(x)=-\frac{1}{2}x^2$

2,5 Meter von der Wand entfernt bedeutet für dieses Koordinatensystem: 3,5 m vom Koordinatenursprung entfernt. Da nicht gesagt wurde, ob die Wand links oder rechts gemeint ist, können wir entweder +3,5 oder -3,5 für x einsetzen.

$f(x_1)=-\frac{1}{2}\cdot 3{,}5^2=-\frac{27}{5}=-6{,}125$. Die Deckenhöhe beträgt hier also 15 m -6,125 m = 11,875 m.

A: Der Abstand der Baumspitze bis zur Decke beträgt 8,875 Meter. ***3 Punkte***