Mathematik Klasse 10 a/b/c, 2. Klassenarbeit – Logarithmen – Lösung B 13.11.2009

B

<u>Aufgabe 1:</u> Schreibe den folgenden Term als Ausdruck einer einzelnen Logarithmusfunktion und vereinfache ihn so weit wie möglich. **(2+3+4 Punkte)**

a)

$$\log_3(72)-\log_3(8)=\log_3\left(\frac{72}{8}\right)=\log_3(9)=\mathbf{2}$$

b)

$$\log_2\left(\frac{\log_a\left(b^8\right)}{\log_a(b)}\right)=\log_2\left(\log_b\left(b^8\right)\right)=\log_2(8)=\mathbf{3}$$

c)

$$\log_k\left(\frac{9a^2-9b^2}{(3\mathrm{a}-3\mathrm{b})^2}\right)+\log_k(a-b)=\log_k\left(\frac{(3a-3b)(3\mathrm{a}+3\mathrm{b})}{(3\mathrm{a}-3\mathrm{b})^2}\right)+\log_k(a-b)$$

$$=\log_k\left(\frac{(a+b)}{(a-b)}\right)+\log_k(a-b)=\log_k\left(\frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)}\right)=\boldsymbol{\log_k(a+b)}$$

<u>Aufgabe 2:</u> Bestimme x mit Hilfe von Äquivalenzumformungen so, dass es eine Lösung der folgenden Gleichung ist. **(3+6 Punkte)**

a)

$$\log_b(x)=2\cdot\log_b(5)+4\cdot\log_b(2)$$
$$\Leftrightarrow\log_b(x)=\log_b\left(5^2\right)+\log_b\left(2^4\right)$$
$$\Leftrightarrow\log_b(x)=\log_b(25\cdot16)$$
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{x=400}$$

b)

$$-\log_a(x)=2\cdot\log_a\left(\frac{b^4c^3}{a^2}\right)+\log_a(a^4)-\log_a(b^4)+2\cdot\log_a(c^{-3})+2\cdot\log_a\left(\frac{a^3}{b^2}\right)$$
$$\Leftrightarrow-\log_a(x)=\log_a\left(\frac{a^6\cancel{b^8c^6a^4}}{\cancel{c^6a^4b^4b^4}}\right)$$
$$\Leftrightarrow\log_a\left(x^{-1}\right)=\log_a\left(a^6\right)$$
$$\Leftrightarrow\frac{1}{x}=a^6$$
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{x=\frac{1}{a^6}}$$

Mathematik Klasse 10 a/b/c, 2. Klassenarbeit – Logarithmen – Lösung B 13.11.2009

Aufgabe 3: Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Exponentialgleichungen. Gib das Ergebnis mit zwei Stellen Genauigkeit hinter dem Komma an. **(3+4+6 Punkte)**

a) $2^{2x-3}=32$

b) $2^x=3\cdot 5^{x+1}$

c) $9^{\left(x^2-\frac{15}{16}\right)}=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

a)

$$\begin{aligned}
& 2^{2x-3}=32 \\
\Leftrightarrow\ & 2^{2x-3}=2^5 \\
\Leftrightarrow\ & 2x-3=5 \\
\Leftrightarrow\ & 2x=8 \\
\boldsymbol{\Leftrightarrow}\ & \boldsymbol{x=4}
\end{aligned}$$

L = {4}

b)

$$\begin{aligned}
& 2^x=3\cdot 5^{x+1} \\
\Leftrightarrow\ & 2^x=3\cdot 5\cdot 5^x \\
\Leftrightarrow\ & lg\left(2^x\right)=lg\left(15\cdot 5^x\right) \\
\Leftrightarrow\ & lg\left(2^x\right)=lg(15)+lg\left(5^x\right) \\
\Leftrightarrow\ & x\cdot lg(2)=lg(15)+x\cdot\log(5) \\
\Leftrightarrow\ & x\cdot\left(lg(2)-lg(5)\right)=lg(15) \\
\Leftrightarrow\ & x=\frac{lg(15)}{lg(2)-lg(5)} \\
\Leftrightarrow\ & \boldsymbol{x\approx -2{,}9554}
\end{aligned}$$

L = {-2,9554}

c)

$$\begin{aligned}
& 9^{\left(x^2-\frac{15}{16}\right)}=\left(\frac{1}{3}\right)^x \\
\Leftrightarrow\ & lg\left(9^{\left(x^2-\frac{15}{16}\right)}\right)=lg\left(\left(\frac{1}{3}\right)^x\right) \\
\Leftrightarrow\ & \left(x^2-\frac{15}{16}\right)\cdot lg(9)=x\cdot lg\left(\frac{1}{9}\right) \\
\Leftrightarrow\ & x^2-\frac{15}{16}=x\cdot\frac{lg\left(\frac{1}{3}\right)}{lg(9)} \\
\Leftrightarrow\ & x^2-\frac{15}{16}=-0{,}5\cdot x \\
\Leftrightarrow\ & x^2+0{,}5\,x-\frac{15}{16}=0 \\
\Leftrightarrow\ & x_{1/2}=-\frac{1}{4}\pm\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{15}{16}} \\
\Leftrightarrow\ & \\
\Leftrightarrow\ & x_{1/2}=-\frac{1}{4}\pm 1 \\
\Rightarrow\ & \boldsymbol{x_1=-\frac{5}{4}\,;\ x_2=\frac{3}{4}}
\end{aligned}$$

L = {-5/4; 3/4}

Mathematik Klasse 10 a/b/c, 2. Klassenarbeit – Logarithmen – Lösung B 13.11.2009

<u>Aufgabe 4:</u> **Pandemie (3+1+2+3 Punkte)**

Eine Pandemie nennt man die weltweite Ausbreitung einer ansteckenden Krankheit. Für die sogenannte "Schweinegrippe" hat die Weltgesundheitsorganisation WHO Pandemiealarm ausgelöst. In dieser Aufgabe betrachten wir die Ausbreitung einer fiktiven Virus-Infektion, die zu Beginn mathematisch dem Verlauf einer Exponentialfunktion folgt.

Als offizielle Stellen zum ersten Mal die Krankheit erkannten, waren bereits 315 Menschen infiziert. Nach 6 Tagen hat sich die Zahl der kranken Menschen bereits verdreifacht.

a) Stelle die Funktionsgleichung auf, welche den Ansteckungsverlauf beschreibt. (f(x): Anzahl der Infizierten, x: Anzahl der Tage seit Erkennen der Epidemie)

$f(t)=b\cdot a^t \quad f(0)=315 \quad , \quad f(6)=3\cdot 315=945$

Einsetzen: $315=b\cdot a^0 \Rightarrow b=315 \quad 3\cdot 315=315\cdot a^6 \Rightarrow a=\sqrt[6]{3}$

Damit: $\mathbf{f(t)=315\cdot\left(\sqrt[6]{3}\right)^t}$ oder $\mathbf{f(t)=315\cdot 3^{\frac{t}{5}}}$

b) Wie viele Menschen waren nach dem ersten Tag erkrankt?

$f(1)=315\cdot 3^{\frac{1}{6}}\approx \mathbf{378{,}30}$ ***A: Nach dem ersten Tag waren ca. 378 Personen erkrankt.***

c) Wie viele Menschen waren fünf Tage, bevor die Krankheit registriert wurde, erkrankt?

$f(-5)=315\cdot 3^{-5¿6}\approx \mathbf{126{,}10}$ ***A: Vier Tage vorher waren ca. 126 Personen erkrankt.***

d) Nach jeweils wie vielen Tagen verdoppelt sich die Anzahl der kranken Menschen?

$f(t)=345\cdot\left(\sqrt[5]{3}\right)^t$ Doppelte Anzahl einsetzen:

$$
\begin{aligned}
&2\cdot 315=315\cdot\left(\sqrt[6]{3}\right)^{t_D}\\
\Leftrightarrow\ &2=\left(\sqrt[6]{3}\right)^{t_D}\\
\Leftrightarrow\ &lg(2)=lg\left(\left(\sqrt[6]{3}\right)^{t_D}\right)\\
\Leftrightarrow\Leftrightarrow\ &lg(2)=t_D\cdot lg\left(\sqrt[6]{3}\right)\\
\Leftrightarrow\ &t_D=\frac{lg(2)}{lg\left(\sqrt[6]{3}\right)}\\
\Leftrightarrow\ &\mathbf{t_D\approx 3{,}7856}
\end{aligned}
$$

A: Nach etwas weniger als 4 Tagen verdoppelt sich die Anzahl der kranken Menschen.